Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Faculté des Sciences**
Département de Mathématiques **Master I**
Année 2019-2020 **Etude Math Science vivant**

Examen final

Exercice 1

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + v(x)u'(x) = f(x), \ \ x \in (0,1), \\ \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ et $v \in C([0,1];\mathbb{R}^-)$.

Supposons que u_i, $i = 1,...,N$ est la solution numérique correspondant à la solution du problème (1).

1-Proposer un schéma numérique différences finies pour le problème (1)

2- Donner la définition de l'erreur de consistance.

3- Supposons que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer alors que $u_i \geq 0$ pour tout $i = 1,..,N$.

Exercice 2

Soient $T > 0$, a_0, $a_1 \in \mathbb{R}^+$ et $u_0 \in C([0,1];\mathbb{R}^+)$.

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + u_x(t,x) = 0, \ \ t \in (0,T), \ \ x \in (0,1), \\ \\ u(t,0) = a_0, \ \ u(t,1) = a_1, \\ \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{2}$$

Supposons que u_i^n, $i = 1,...,N$ et $n = 1,...M$ est la solution numérique correspondant à la solution du problème (2).

1-Proposer un schéma numérique différences finies **implicite** pour le problème (2).

2- Montrer que $u_i^n \geq 0$ pour tout $i = 1,...,N$ et $n = 1,...,M$.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Faculté des Sciences**
Département de Mathématiques **Master I**
Année 2019-2020 **Etude Math Science vivant**

Correction de l'examen final 2

Exercice 1 (10pts)

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x)+v(x)u'(x)=f(x), \ \ x\in(0,1), \\ \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases} \tag{1}$$

où $f\in C([0,1];\mathbb{R})$ et $v\in C([0,1];\mathbb{R}^-)$.

Supposons que u_i, $i=1,...,N$ est la solution numérique correspondant au problème (1).

1-Proposer un schéma numérique différences finies pour le problème (1)

2- Donner la définition de l'erreur de consistance.

3- Supposons que $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[0,1]$. Montrer alors que $u_i\geq 0$ pour tout $i=1,..,N$.

Correction de l'exercice 1

1- Le schéma est le suivant, **(1pt)**

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(2u_i-u_{i-1}-u_{i+1})+v_i\frac{u_{i+1}-u_i}{h}=f(x_i), \ \ i=1,...,N, \\ \\ u_0=u_{N+1}=0, \end{cases}$$

où $f_i=f(x_i)$ et $v_i=v(x_i)$. **(2pts)**

2- l'erreur de consistance est donnée comme suit

$$R_i=\frac{1}{h^2}(2u(x_i)-u(x_{i-1})-u(x_{i+1}))+v(x_i)\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h}-f(x_i). \ \textbf{(2pts)}$$

3- Soit $p=\min\{i=1,...,N;u_i=\min\limits_{j=1,...,N}u_j\}$ **(1pt)**

Alors u_p vérifie,

$$\frac{1}{h^2}(u_p-u_{p-1})+\frac{1}{h^2}(u_p-u_{p+1})+v_p\frac{u_{p+1}-u_p}{h}\geq 0. \tag{2}$$

Supposons maintenant que $p=2,...,N-1$, alors l'inégalité (2) est impossible, car par la définition de p on a $u_p-u_{p-1}<0$, $u_p-u_{p+1}\leq 0$ et puisque $v_p\leq 0$ alors $v_p(u_{p+1}-u_p)\leq 0$. **(2pts)**

A présent, si $p=1$ on a

$$\frac{1}{h^2}(u_1-u_0)+\frac{1}{h^2}(u_1-u_2)+v_1\frac{u_2-u_1}{h}\geq 0. \tag{3}$$

Puisque $u_1-u_2\leq 0$ et $v_1\frac{u_2-u_1}{h}\leq 0$ alors on a nécessairement $u_1\geq u_0=0$. **(1pt)**

Si $p = N$ alors on a

$$\frac{1}{h^2}(u_N - u_{N-1}) + \frac{1}{h^2}(u_N - u_{N+1}) + v_N \frac{u_{N+1} - u_N}{h} \geq 0.$$

On réécrit cette inégalité comme suit

$$\frac{1}{h^2}(u_N - u_{N-1}) + \big(\frac{1}{h^2} - \frac{v_N}{h}\big)(u_N - u_{N+1}) \geq 0.$$

Donc puisque $u_N - u_{N-1} < 0$ et $\frac{1}{h^2} - \frac{v_N}{h} \geq 0$ alors on a nécessairement $u_N \geq u_{N+1} = 0$. **(1pt)**

En conclusion $u_i \geq 0$ pour tout $i = 1, ..., N$.

Exercice 2 (10pts)

Soient $T > 0$, a_0, $a_1 \in \mathbb{R}^+$ et $u_0 \in C([0,1];\mathbb{R}^+)$.

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + u_x(t,x) = 0, \ \ t \in (0,T), \ \ x \in (0,1), \\ u(t,0) = a_0, \ u(t,1) = a_1, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{4}$$

Supposons que u_i^n, $i = 1, ..., N$ et $n = 1, ...M$ est la solution numérique correspondant à la solution du problème (4).

1-Proposer un schéma numérique différences finies **implicite** pour le problème (4).

2- Montrer que $u_i^n \geq 0$ pour tout $i = 1, ..., N$ et $n = 1, ..., M$.

Correction de l'exercice 2

1- Le schéma différences finies implicite est donné comme suit : **(2pts)**

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{2u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} - u_{i+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} = 0, \ \ i = 1, ..., N, \ \ n = 0, ..., M-1 \\ u_0^{n+1} = a_0, \ \ u_{N+1}^{n+1} = a_1, \ \ n = 0, ...M-1, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \ \ i = 1, ...N. \end{cases}$$

2- Le schéma peut être réécrit comme suit

$$(1 + \frac{2k}{h^2} + \frac{1}{h})u_i^{n+1} = (\frac{k}{h^2} + \frac{1}{h})u_{i-1}^{n+1} + \frac{k}{h^2}u_{i+1}^{n+1} + u_i^n, \ \ i = 1, ..., N, \ \ n = 0, ..., M-1.$$

Posons $U^{n+1} = \min\limits_{i=1,...,N} u_i^{n+1}$, **(2pts)** alors

$$(1 + \frac{2k}{h^2} + \frac{1}{h})u_i^{n+1} \geq (\frac{k}{h^2} + \frac{1}{h}) \min\limits_{i=0,...,N-1} u_i^{n+1} + \frac{k}{h^2} \min\limits_{i=2,...,N+1} u_i^{n+1} + U^n,$$

donc

$$\begin{aligned} (1 + \frac{2k}{h^2} + \frac{1}{h})u_i^{n+1} &\geq (\frac{k}{h^2} + \frac{1}{h}) \min\big(U^{n+1}, u_0^{n+1}\big) + \frac{k}{h^2} \min\big(U^{n+1}, u_{N+1}^{n+1}\big) + U^n, \ \ \textbf{(2pts)} \\ &\geq (\frac{k}{h^2} + \frac{1}{h}) \min\big(U^{n+1}, a_0\big) + \frac{k}{h^2} \min\big(U^{n+1}, a_1\big) + U^n, \end{aligned}$$

Si $U^{n+1} \geq a_0$ ou $U^{n+1} \geq a_1$ **(2pts)** alors le résultat est atteint car $a_0 \geq 0$ et $a_1 \geq 0$. Sinon

$$(1+\frac{2k}{h^2}+\frac{1}{h})\min u_i^{n+1} \quad \geq \quad (\frac{2k}{h^2}+\frac{1}{h})U^{n+1}+U^n,$$

donc

$$(1+\frac{2k}{h^2}+\frac{1}{h})U^{n+1} \geq (\frac{2k}{h^2}+\frac{1}{h})U^{n+1}+U^n,$$

où bien

$$U^{n+1} \geq U^n, \;\; n=0,...,M-1,$$

par itération on trouve **(2pts)**

$$U^n \geq U^0 = \min_{x\in[0,1]} u_0(x), \;\; n=1,...,M,$$