

**Problème [15 pts] :**

Dans le modèle simple du chemostat suivant, où  $x$  représente la concentration d'un microorganisme se nourrissant d'un substrat de concentration  $S$ ,

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{S} = D(S_{in} - S) - \mu(S)x, \\ \dot{x} = (\mu(S) - D_1)x, \end{cases}$$

les paramètres  $D$ ,  $D_1$  et  $S_{in}$  sont strictement positifs. Nous faisons l'hypothèse suivante :

**(H) La cinétique  $\mu$  est de classe  $C^1$ , nulle en 0 et de dérivée strictement positive pour tout  $S \geq 0$ .**

1°) [4.5] Sous quelle condition, notée  $(C_1)$ , le modèle  $(\Sigma)$  admet-il un équilibre intérieur qu'on désignera par  $E_1$ ? Définir et tracer, sous cette condition, les isoclines  $\dot{S} = 0$  et  $\dot{x} = 0$ . Etudier alors localement, dans ce cas, la stabilité de tous les équilibres.

2°) [4.5] Sous quelle condition supplémentaire, notée  $(C_2)$ , peut-on appliquer le principe de conservation des masses ? Sous ces conditions, établir que le modèle admet un équilibre intérieur  $E_1$  GAS pour toute condition initiale  $(S_0, x_0)$  telle que  $S_0 \geq 0$  et  $x_0 > 0$ .

3°) [4.5] Considérons cette fois le modèle

$$(\Sigma_\varepsilon) \quad \begin{cases} \varepsilon \dot{S} = D(S_{in} - S) - \mu(S)x, \\ \dot{x} = (\mu(S) - D_1)x, \end{cases}$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre positif, sous l'hypothèse  $(H)$ . Supposons que seule la condition  $(C_1)$  est vérifiée. Etablir alors que, pour toute condition initiale  $(S_0, x_0)$  telle que  $S_0 \geq 0$  et  $x_0 > 0$ , le point  $E_1$  est SGPAS quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour le modèle  $(\Sigma_\varepsilon)$ .

4°) [1.5] Quel commentaire feriez-vous en comparant les résultats précédents?

**Exercice [5 pts] :**

Montrer que si un système lent-rapide planaire  $C^\infty \{\varepsilon \dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y)\}$  admet une variété critique  $M_0$  normalement hyperbolique verticale dans le plan  $xoy$ , alors on ne peut distinguer entre le graphe de  $M_0$  et la  $O(\varepsilon^2)$  approximation du graphe de la variété invariante de Fenichel. Donner un exemple.

La science est une méthode consistant à tester des hypothèses au sujet du monde matériel, et non pas un catalogue de vérités immuables.

Stephen Jay Gould, "La foire aux dinosaures" Ed. du Seuil, 1993.

# Corrigé du Final: Méthodes de Résolution II

Au 2019/2020

Problème: (2)  $\begin{cases} \dot{s} = D(f_{12} - s) - \mu(s)n \\ \dot{n} = (\mu(s) - D_2)n \end{cases}$

15/20

10) Équilibrs de (2):

$$\dot{s} = 0 \Leftrightarrow n = \frac{D(f_{12}-s)}{\mu(s)} := \varphi(s)$$

$\dot{n} = 0 \Leftrightarrow n = 0$  ou  $\mu(s) = D_2 \Leftrightarrow n = 0$  ou  $s = \mu'(D_2) = d_1$   
(d'après l'hyp. (H)).

Si  $n = 0$  alors  $\varphi(s) = 0$  donc  $s = f_{12}$ . D'où l'équilibre de lessivage  $E_0 = (f_{12}, 0)$ , qui existe toujours. 0.15

Si  $\varphi = d_1$  alors  $\varphi = \varphi(d_1) = \frac{D(f_{12}-d_1)}{D_2}$ , d'où

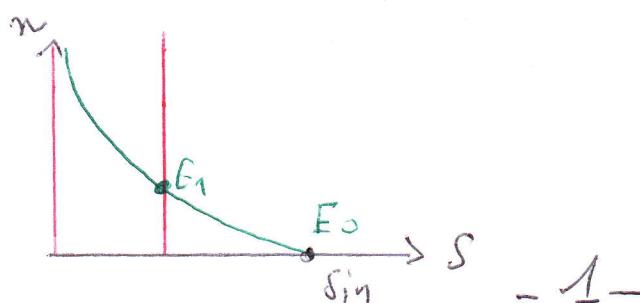
l'équilibre intérieur  $E_1 = (d_1, \frac{D(f_{12}-d_1)}{D_2})$  qui existe 0.15  
(i.e. si et seulement si)  $f_{12} - d_1 > 0$

$\Leftrightarrow f_{12} > d_1 \Leftrightarrow \mu(f_{12}) > D_2$  C1 0.15

• Représentations graphiques des isoclines nulles.

$\dot{s} = 0$   $\Leftrightarrow n = \varphi(s)$ . Or  $\varphi(f_{12}) = 0$  et  $\lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s) = +\infty$  d'après (H).  
De plus  $\varphi'(s) = \frac{1}{\mu^2(s)} (-D\mu(s) - D(f_{12}-s)\mu'(s)) < 0$  sur  $[0, f_{12}]$  1

$\dot{n} = 0$   $\Leftrightarrow n = 0$  ou  $n = D_2$  avec  $d_1 < f_{12}$



0.15

• Stabilité par linéarisation : La fonction de  $(\Sigma/\sigma)(s_m)$ :

$$\text{Jac } (\Sigma, u) = \begin{pmatrix} -D - \mu'(s)u & -\mu(s) \\ \mu'(s)u & \mu(s) - D_1 \end{pmatrix}$$

d'où  $\text{Jac } E_0 = \begin{pmatrix} -D & -\mu(s_m) \\ 0 & \mu(s_m) - D_1 \end{pmatrix}$  a 2 valeurs propres

d'après la conditi  $C_1$ . et l'hyp  $H$ .

$E_0$  est un point-selle de séparation stable l'axe des  $(S)$ . OK

D'autre part

$$\text{Jac } E_1 = \begin{pmatrix} -D - \mu'(d_1) \cdot q(d_1) & -D_1 \\ \mu'(d_1) \cdot q(d_1) & 0 \end{pmatrix}$$

car  $\mu(d_1) = D_1$ .  $\text{Trace}(\text{Jac}(E_1)) = -D - \mu'(d_1)q(d_1) < 0$

et  $\det(\text{Jac}(E_1)) = D_1 \mu'(d_1)q(d_1) > 0$

D'où  $E_1$  est un équilibre intérieur localement exponentiellement stable. OK

2) Si on pose  $\Sigma = S + u - \sin$ , alors

$$\dot{\Gamma} = D \sin - D S - D_u u \\ = - D \cancel{\Gamma} \text{ si } D = D_S. \quad (\text{C}_2)$$
OK

Si cette condition ( $C_2$ ) n'est pas vérifiée, il n'y a pas conservatuer des masses. Dans le cas où ( $C_2$ ) est vérifiée, ( $C_1$ ) devient  $\mu(\sin) > D$ .

Le système ( $\Sigma$ ) devient sous ces conditions :

$$(\Sigma_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\Gamma} = -D \Gamma \\ \dot{u} = (\mu(\Gamma - u + \sin) - D) u \end{array} \right.$$

La 1ère équation donnant  $\Gamma(t) = \Gamma(0) e^{-Dt}$ , on obtient l'équation différentielle asymptotiquement autonome

$$(L_1) \quad \dot{u} = (\mu(\Gamma(t) - u + \sin) - D) u \quad \text{OK}$$

qui a pour système limite, sachant que  $\Gamma(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ ,

$$(L_2) \quad \dot{u} = \underline{[\mu(-u + \sin) - D] u} \quad \text{OK}$$

Pour appliquer le théorème de convergence de Thiemke, dans ce cas simple scalaire, il suffit de chercher les points d'équilibre de ( $L_2$ ) et s'assurer qu'ils sont hyperboliques. Il ne peut y avoir de chaîne fermée

par une ligne de phasé !

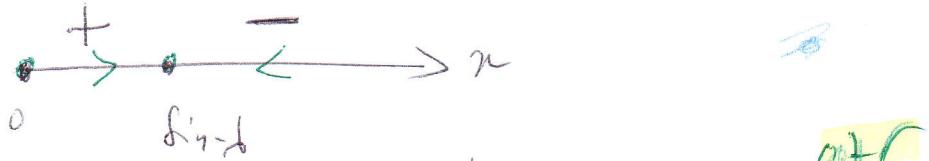
Du fait que  $\mu$  est invisible et que  $\mu(h_1) > 0$ , on obtient 2 équilibrs de  $(L_2)$ :

$$u_0^* = 0 \quad \text{ou} \quad u_1^* = h_1 - d_1 > 0 \quad \text{avec } d = \mu'(0) = d_1.$$

De plus, on aurait  $\mu(h_1 - u) - d > 0$  dans  $(L_2)$

$$\text{si } h_1 - u > \mu^{-1}(d) = d_1 \Leftrightarrow u < h_1 - d_1.$$

D'où (voir ligne de phasé),  $u_0^*$  est répulsif et  $u_1^*$  est attractif.



Ainsi  $u_1^* = h_1 - d_1$  est GAS pour  $(L_2)$ ,  $h_1 - d_1 > 0$  OK

Aux équilibrs  $u_0^*$  et  $u_1^*$  de  $(L_2)$ , (où  $\mu'$ ) sont les équilibrs hyperboliques  $E_0 = (0, 0)$  et  $E_1 = (0, h_1 - d_1)$  de  $(\Sigma)$  c.-à-d.  $E_0 = (0, h_1 - d_1)$  et  $E_1 = (d_1, h_1 - d_1)$  de  $(\Sigma)$ . OK

D'après le théorème de Thiemer, si  $(S(t), v(t))$  est une solution de  $(\Sigma)$ , alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t), v(t))$  existe OK

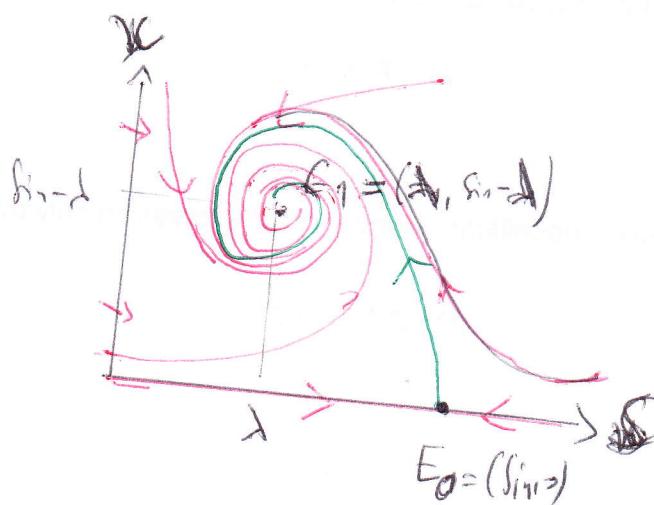
et vaut  $E_0$  ou  $E_1$ . Dans notre cas,  $s(0) = s_0 \geq 0$

et  $v(0) = v_0 > 0$  assure que cette solution tend vers  $E_1$ , (l'axe des  $s$  est invariant et le champ est transverse et ouvert sur l'axe des  $v$ , voir figure ci-dessus). OK

D'où  $E_1$  est GAS pour toute condition initiale

$\Rightarrow \gamma_1 > 0$ .

Q17



Portrait de phase  
de  $(\Sigma)$  sous  
les conditions  
 $C_1$  et  $C_2$ .

$$3^\circ) (\Sigma_\varepsilon) \quad \begin{cases} \dot{s} = D(s_y - s) - \mu(s) u \\ \dot{u} = (\mu(s) - D_1) u \end{cases}, \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1$$

sous l'hypothèse (H) et (C).

Mais que l'on ne peut pas, pour ce système singulièrement perturbé, appliquer la réduction par bilan des masses aussi bien à cause de la présence de  $\varepsilon$  que du fait que  $D$  et  $D_1$  ne sont pas nécessairement identiques.

$$\text{E.R. } \dot{s}' = D(s_y - s) - \mu(s) u, \quad u \text{ paramétrique} \quad \text{Q150}$$

$$(1) = \frac{d}{ds}, \quad C = \frac{d}{dE} \frac{t}{\varepsilon}$$

$$(2) = \frac{d}{dt}.$$

$$\text{Variété stable: } u = \frac{D(s_y - s)}{\mu(t)} = \varphi(s) \quad \text{Q15} \quad \Delta$$

Elle est strictement décroissante sur  $[0, t_0]$  (c'est aussi l'isochore  $\dot{s} = 0$ !), elle admet une fonction rapporte strictement décroissante de classe  $C^1$ .

$$\begin{cases} S = \Psi(u) = \psi^{-1}(u) \\ u \in [0, +\infty[ \end{cases} \quad \underline{\text{Variété lente}} \quad \text{aff}$$

• Attractivité:  $\int_S \left( D(h_i - d) - \mu'(s)u \right) = -D - \mu'(s)u \geq 0$  donc d'après la variété lente  $S = \Psi(u)$  est un point attractif pour tout compact inclus dans  $[0, +\infty[$ .

• Équations lentes:

$$\dot{u} = (\mu(\Psi(u)) - D)u \quad (\text{E.L}) \quad \text{aff}$$

• Équilibres de (E.L):  $u = 0$  ou  $\mu(\Psi(u)) = D_1$

$$\Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } \Psi(u) = \mu^{-1}(D_1) \quad (\text{H})$$

$$\Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } u = \Psi^{-1}(\mu^{-1}(D_1)) = \Psi(D_1)$$

$$\text{avec } \Psi(D_1) = \frac{D(h_i - d)}{\mu(D_1)} = \frac{D}{D_1}(h_i - d_1). \geq 0 \text{ d'après (G).}$$

Pour tout condition initiale  $u_0 > 0$ ,  $\frac{D(h_i - d)}{D_1} =: u_1^*$  est

G.A.S. pour (E.L), d'où  $E_1 = (d_1, h_i - d_1)$

est SGPAS quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour  $(\Sigma_\varepsilon)$  pour tout

c.e.s  $S_0 \geq 0$  et  $u_0 > 0$ .

1

- 4). Dans la question 1<sup>o</sup>), sans réduction, on obtient 15  
la stabilité asymptotique locale de l'attracteur intérieur  $E_1$ .  
Pour avoir sa stabilité asymptotique globale, il faut prouver  
l'étalement plus loin (par exemple en cherchant une bonne  
fonction de Lyapounov).
- Dans la question 2<sup>o</sup>), la stabilité asymptotique globale  
est assurée par la théorie de Thicane (du moins  
d'attractivité locale) pourvu que le système (I)  
soit conservatif (i.e.  $D = D_1$ ). C'est plus simple que  
de chercher une fonction de Lyapounov ou que d'utiliser  
un théorème qui exclut l'existence d'un cycle limite.
  - Dans la question 3<sup>o</sup>), envers pourra-t-il justifier le  
caractère lent-rapide du modèle, la stabilité  
asymptotique globale est obtenue au apparence  
quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . (semi-globalement pratiquement asymptoti-  
quement stable). En dimensions supérieures,  
le dernier résultat est satisfaisant.

Remi: La théorie de Fenichel permettrait de démontrer  
aussi que  $E_1$  est GAS pour  $(\Sigma_\varepsilon)$ , pour  $\varepsilon > 0$ .

Exercice: La variété infinitésimale donnée dans  
 5/20 le cas par la fonction  $h: K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$y \xrightarrow{\text{cpl}} u = h(y) = c \quad 1$$

D'après le théorème de la variété invariant de Fenichel, il existe une variété localement invariant  $\tilde{M}_\varepsilon$ ,  $\mathcal{O}(s)$  proche de  $\mathbb{R}_0$ , graph d'une fonction

$$h_\varepsilon: K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y_1 \xrightarrow{\varepsilon} u = h_\varepsilon(y) \quad 1$$

telle que  $h_\varepsilon(y) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\rightarrow} h_0$ . On cherche  $h_\varepsilon$  sous

la forme  $h_\varepsilon(y) = h_0(y) + \varepsilon h_1(y) + O(\varepsilon^2)$ . Mais savons

$$\text{que } h_1(y) = \frac{1}{f'(h_0(y))} \cdot h'_0(y) \cdot g(h_0(y), y) \quad 1$$

$$\text{or } h'_0(y) = 0, \text{ d'où } h_1(y) = 0. \quad \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ M_0, \tilde{M}_\varepsilon \end{array}$$

$$\text{D'où } h_\varepsilon(y) = h_0(y) + O(\varepsilon^2). \quad \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ M_0, \tilde{M}_\varepsilon \end{array} \quad 1$$

On ne peut donc distinguer dans le cas le graphe  
 de  $\mathbb{R}_0$  et le graphe de  $\tilde{M}_\varepsilon$ , l'approximation  $O(\varepsilon^2)$  de  $M_\varepsilon$ .

Exempl.  $\begin{cases} \dot{u} = u(1-u)+\varepsilon y \\ \dot{y} = ny^2 \end{cases}$

(...)