Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2019-2020
Module : Contrôle optimal
Date : 27-09-2020

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

EXAMEN FINAL

Exercice 1 : 7 points

On considère le problème de contrôle optimal suivant

$$(1)\qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t)\,,\ t \in [0,T]\,, \\ x(0) = x_0, \\ \min\limits_{u \in L^2([0,T],\ \mathbb{R})} \left(x(T) + \int\limits_0^T u^2(s)\,ds \right), \end{cases}$$

où u est le contrôle, $T > 0$ fixé et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) Écrire le Hamiltonien associé au problème (1).

2) On note par u^* le contrôle optimal et x^* la trajectoire optimale associée. En appliquant le principe du maximum de Pontryagin

i) Écrire l'équation de l'état adjoint $\lambda(t)$.

ii) Vérifier que $\lambda(T) = 1$.

iii) Écrire les autres conditions d'optimalité.

3) Résoudre ce système d'optimalité et trouver le contrôle optimal u^* et la trajectoire optimale x^*.

Exercice 2 : 13 points

On considère le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} x'(t) = -rx(t) + c(t)\,,\ t \in [0,T]\,, \\ x(0) = x_0, \\ \min\limits_{c \in C([0,T],\ [0,M])} J(c)\,, \end{cases}$$

où $r > 0$, $x_0 > 0$, $T > 0$ fixé, c est le contrôle avec $M > 0$ et

$$J(c) = -\int\limits_0^T e^{-\alpha t} \left(F(x(t)) - G(c(t)) \right) dt,$$

avec $\alpha > 0$ et F et G satisfaient les hypothèses suivantes

F est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ telle que $F' > 0$ et $F'' < 0$,

et

G est une fonction de classe C^2 sur $[0,M]$ telle que $G > 0$ et $G'' > 0$.

1)

1.1) Vérifier que la solution du problème initial suivant

$$\begin{cases} x'(t) = -rx(t) + c(t)\,,\ t \in [0,T]\,, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

est donnée par

$$x(t) = x_0 e^{-rt} + \int_0^t e^{-r(t-s)} c(s)\, ds, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

1.2) En déduire que $x(t) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$.

2) Soit P la solution du problème à valeur finale suivant

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} P'(t) = rP(t) + e^{-\alpha t} F'(x(t)), \ t \in [0,T], \\ P(T) = 0. \end{cases}$$

2.1) Vérifier que

$$P(t) = -\int_t^T e^{r(t-s)} e^{-\alpha s} F'(x(s))\, ds.$$

2.2) En déduire que

$$-\frac{F'(0)}{r+\alpha} e^{-\alpha t} < P(t) < 0, \text{ pour tout } [0,T].$$

3) On note par c^* le contrôle optimal et x^* la trajectoire optimale associée. En appliquant le principe du maximum de Pontryagin

i) Déterminer les équations satisfaites par (x^*, λ) où λ désigne la variable adjointe,

ii) La condition initiale satisfaite par x^* et la condition finale satisfaite par λ,

iii) Montrer que c^* résout un problème de minimisation que l'on énoncera.

4) Déduire de la question 2.2) que λ est strictement négative sur $[0,T]$.

5) Soit $t \in [0,T]$. On introduit la fonction L_t définie par

$$\begin{aligned} L_t : \quad & [0,M] \to \mathbb{R} \\ & c \mapsto L_t(c) = c.\lambda(t) + e^{-\alpha t} G(c). \end{aligned}$$

5.1) Vérifier que $L_t''(c) > 0$, pour tout $c \in [0,M]$.

5.2) On suppose qu'il existe $\widehat{c} \in (0,M)$ tel que $G'(\widehat{c}) = 0$ et que $G'(M) > \frac{F'(0)}{r+\alpha}$. Etudier les variations de la fonction L_t.

5.3) En déduire que $c^*(t) = (G')^{-1}(-\lambda(t) e^{\alpha t})$; pour tout $t \in [0,T]$, où $(G')^{-1}$ est l'application inverse de G'.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques.

A.U. : 2019-2020
Module : Contrôle optimal
Date : 27-09-2020.

Niveau : Première Année Biomathématiques et Modélisation.

Corrigé de l'examen final

Exercice 1

1°) Le Hamiltonien H associé au problème (1) est donné par

$$H(x,\lambda,u) = \lambda.(x+u) + u^2.$$

2°)

i) L'équation de l'état adjoint $\lambda(t)$ est donnée par

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, \lambda, u^*) \quad \text{p.p. sur } [0,T]$$

$$= -\lambda(t) \quad \text{p.p. sur } [0,T].$$

ii) Vérifions que $\lambda(T) = 1$.

Si on pose $\Psi(x(T)) = x(T)$.

Alors, on a

$$\lambda(T) = \Psi'(x^*(T))$$
$$= 1.$$

iii) Les autres conditions d'optimalité sont:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) + u^*(t), & \text{p.p. } t \in [0, T], \\ x^*(0) = x_0, \end{cases} \qquad (A)$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*, \lambda, u^*) = 0$$ (car il n'y a aucune contrainte sur le contrôle).

C'est-à-dire,

$$\lambda(t) + 2u^*(t) = 0.$$

C'est-à-dire,

$$u^*(t) = -\frac{\lambda(t)}{2} \qquad (B)$$

3°) Déterminons le contrôle optimal u^* et la trajectoire optimale x^*.

D'après i) et ii), on a

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\lambda(t), & \text{p.p. sur } [0,T], \\ \lambda(T) = 1. \end{cases}$$

Alors,

$$\lambda(t) = e^{T-t}, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Par suite d'après (B), on obtient

$$u^*(t) = -\frac{e^{T-t}}{2}.$$

Maintenant d'après (A), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) - \frac{e^{T-t}}{2}, & \text{p.p. sur } [0,T], \\ x^*(0) = x_0. \end{cases}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} x^*(t) &= x_0 e^t - \frac{e^{T+t}}{2} \int_0^t e^{-2s}\, ds \\ &= x_0 e^t - \frac{e^{T+t}}{2} \left[\frac{e^{-2t}}{-2} + \frac{1}{2} \right] \\ &= x_0 e^t + \frac{e^{T-t} - e^{T+t}}{4} = \boxed{x_0 e^t - \frac{e^T \operatorname{Sh}(t)}{2}}, \quad \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Exercice 2

1)

1.1) On a,

$$x'(t) = -r\,x(t) + c(t), \quad t \in [0,T].$$

Alors,

$$\left(e^{rt}\,x(t)\right)' = e^{rt}\,c(t), \quad t \in [0,T].$$

Ce qui donne,

$$e^{rt}x(t) - x_0 = \int_0^t e^{rs}\,c(s)\,ds, \quad t \in [0,T].$$

C'est-à-dire,

$$x(t) = e^{-rt}x_0 + \int_0^t e^{-r(t-s)}\,c(s)\,ds, \quad t \in [0,T].$$

1.2°) En déduire que $x(t) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$.

D'après la question précédente, on a

$$x(t) = e^{-rt}x_0 + \int_0^t e^{-r(t-s)}\,c(s)\,ds, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Comme la fonction c est positive et $x_0 > 0$, on obtient

$$x(t) > 0, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

2)

2.1) On a,

$$P'(t) = r\,P(t) + e^{-\alpha t} F'(x(t)),\ t \in [0,T].$$

C'est-à-dire,

$$\left(e^{-rt} P(t)\right)' = e^{-(\alpha+r)t} F'(x(t)),\ t \in [0,T].$$

Alors,
$$\int_t^T \left(e^{-rs} P(s)\right)' ds = \int_t^T e^{-(\alpha+r)s} F'(x(s))\, ds.$$

C'est-à-dire,

$$e^{-rT} P(T) - e^{-rt} P(t) = \int_t^T e^{-(\alpha+r)s} F'(x(s))\, ds.$$

Comme $P(T) = 0$, on obtient

$$P(t) = -\int_t^T e^{r(t-s)} e^{-\alpha s} F'(x(s))\, ds, \text{ pour}$$

tout $t \in [0,T]$.

2.2) En déduire que

$$-\frac{F'(0)}{r+\alpha} e^{-\alpha t} < P(t) < 0, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$P(t) = -\int_t^T e^{r(t-s)} e^{-\alpha s} F'(x(s))\, ds.$$

Alors d'après la première formule de la moyenne, on a

$$P(t) = -F'(x(\tilde{t})) \int_t^T e^{r(t-s)} e^{-\alpha s}\, ds, \text{ avec } \tilde{t} \in [t,T].$$

Comme $F' > 0$, on obtient

$$P(t) < 0, \text{ pour tout } t \in [0,T]. \quad (*)$$

D'autre part comme la fonction F' est strictement décroissante (voir par hypothèse on a $F'' < 0$) et $x(s) > 0$, pour tout $s \in [0,T]$, alors on a

$$P(t) > -F'(0) \int_t^T e^{r(t-s)} e^{-\alpha s}\, ds$$

C'est-à-dire,

$$P(t) > -F'(0)e^{rt}\int_t^T e^{-(r+\alpha)s}\,ds$$

$$= -F'(0)e^{rt}\left[-\frac{e^{-(r+\alpha)T}}{r+\alpha}+\frac{e^{-(r+\alpha)t}}{r+\alpha}\right]$$

$$= F'(0)e^{rt}\frac{e^{-(r+\alpha)T}}{r+\alpha}-\frac{F'(0)e^{-\alpha t}}{r+\alpha}$$

$$> -\frac{F'(0)}{r+\alpha}e^{-\alpha t}.$$

C'est-à-dire,

$$P(t) > -\frac{F'(0)}{r+\alpha}e^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t\in[0,T] \quad (**)$$

En conclusion d'après (*) et (**), on obtient

$$-\frac{F'(0)}{r+\alpha}e^{-\alpha t} < P(t) < 0, \text{ pour tout } t\in[0,T].$$

3°)

i) Le Hamiltonien H est défini par

$$H(t,x,\lambda,c) = \lambda.(-r.x + c) - e^{-\alpha t}(F(x) - G(c)).$$

Les équations satisfaites par (x^*, λ) sont

$$\begin{cases} x^{*\prime}(t) = -r\,x^*(t) + c^*(t), & t \in [0,T], \\ \lambda'(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(t, x^*, \lambda, c^*) = r.\lambda(t) + e^{-\alpha t} F'(x(t)), & t \in [0,T]. \end{cases}$$

ii) La condition initiale satisfaite par x^* et la condition finale satisfaite par λ sont

$$x^*(0) = x_0,$$

et $\quad \lambda(T) = 0 \quad$ (car $\lambda(T) = \Psi'(x(T))$ avec $\Psi \equiv 0$).

iii) On a,

$$H(t, x^*, \lambda, c^*) = \min_{c \in [0,M]} H(t, x^*, \lambda, c).$$

C'est-à-dire,

$$\lambda.(-r\,x^* + c^*) - e^{-\alpha t}(F(x^*) - G(c^*))$$

$$= \min_{c \in [0,M]} \left[\lambda.(-r\,x^* + c) - e^{-\alpha t}(F(x^*) - G(c))\right].$$

C'est-à-dire,

$$\lambda . c^* + e^{-\alpha t} G(c^*) = \min_{c \in [0,M]} \left[\lambda . c + e^{-\alpha t} G(c) \right].$$

4°) On a,

$$\begin{cases} \lambda'(t) = r\lambda(t) + e^{-\alpha t} F'(x(t)), \ t \in [0,T], \\ \lambda(T) = 0. \end{cases}$$

Alors d'après la question 2.2), on obtient

$$\lambda(t) < 0, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

5)

5.1°) On a,

$$L_t(c) = c . \lambda(t) + e^{-\alpha t} G(c).$$

Alors,

$$L_t''(c) = e^{-\alpha t} G''(c)$$

> 0 car $G'' > 0$ par hypothèse.

5.2°) Pour tout $c \in [0, M]$, on a :

$$L_t(c) = c.\lambda(t) + e^{-\alpha t} G(c).$$

Alors, $L_t'(c) = \lambda(t) + e^{-\alpha t} G'(c)$

Par suite, $L_t'(0) = \lambda(t) + e^{-\alpha t} G'(0)$

< 0 (car $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in [0, T]$, et $G'(0) < 0$ car la fonction G' est strictement croissante et $G'(\hat{c}) = 0$, avec $\hat{c} \in (0, M)$),

et

$$L_t'(M) = \lambda(t) + e^{-\alpha t} G'(M)$$

$$> -\frac{F'(0)}{r+\alpha} e^{-\alpha t} + \frac{e^{-\alpha t} F'(0)}{r+\alpha}$$ (D'après la question 2.2°) et on a $G'(M) > \frac{F'(0)}{r+\alpha}$).

$$= 0,$$

c'est-à-dire, $L_t'(M) > 0$.

Par conséquent on a le tableau de variations suivant

c	0		$\hat{c}$		c^*		M
$L_t'(c)$		$-$			0	$+$	
$L_t(c)$	$L_t(0)$	$\searrow$			$L_t(c^*)$	$\nearrow$	$L_t(M)$

5.3°) On a,

$$L_t'(c^*(t)) = 0, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

C'est-à-dire,

$$\lambda(t) + e^{-\alpha t} G'(c^*(t)) = 0, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

C'est-à-dire,

$$G'(c^*(t)) = -\lambda(t) e^{\alpha t}, \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Ce qui donne,

$$c^*(t) = (G')^{-1}(-\lambda(t) e^{\alpha t}), \text{ pour tout } t \in [0,T].$$