Module: Systèmes Dynamiques
Examen de rattrapage (Lundi 11/11/2020 )
Durée 1h30'

**Exercice1:**Soit le système

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases} \tag{1}$$

avec $x(0) = x_0 > 0$, et $y(0) = y_0 > 0$.Les paramètres $a, b, c$ et $d$ sont positifs.

**Partie I)**

1) Expliquer en quelques phrases le phénomène mis en jeu dans le système (1).

2) Montrer que pour toute valeur initiale $x_0, y_0$ , le système (1) admet une solution $x(t), y(t)$.

2) Montrer que

$$H(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y$$

est une intégrale première , i.e $H(x(t), y(t))$ =constante pour tout $t$

3) En déduire que les solutions de (1) sont bornées pour tout $t > 0$.

4) Montrer que les solutions de (1) sont positives.

**Partie II)**

1) Donner les points d'équilibre .

2) Montrer que

$$V(x, y) = H(x, y) - H(x_*, y_*)$$

où $(x_*, y_*)$ est un point d'équilibre de (1) , est une fonction de Lyapunov.

3) En déduire la nature des points d'équilbre de (1).

**Partie III)**

1) Montrer que toutes les solutions de (1) sont périodiques.

2)On définit les moyennes sur une période $T$, de la façon suivante

$$< x >= \frac{1}{T} \int_0^T x(s) ds$$

Montrer que

$$< x >= \frac{c}{d}, \text{ et } < y >= \frac{a}{b}$$

**Exercice2.**

a) Donner la définition d'un cycle limite

b) Un système linéaire admet il un cycle limite ? Expliquer pourquoi.

Module: Systèmes Dynamiques
Contrôle Continu (Lundi 11 novembre 2020)
Durée 1h30'

**Exercice:**Soit le système

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases} \tag{1}$$

avec $x(0) = x_0 > 0$, et $y(0) = y_0 > 0$.Les paramètres $a, b, c$ et $d$ sont positifs.

**Partie I)**

**1)** Expliquer en quelques phrases le phénomène mis en jeu dans le système (1).

Sol:**Le système décrit une interaction entre les proies et prédateurs.(01 pt)**

2) Montrer que pour toute valeur initiale $x_0, y_0$ , le système (1) admet une solution $x(t), y(t)$.

Sol:**Le système est sous la forme**

$$z' = f(z),\ z(0) = z_0$$

**avec f , une fonction de classe $\mathbf{C}^1(R \times R)$.Le théorème de Cauchy-Lipschitz implique que lesystème en question admet un solution locale unique.(02 pts)**

2) Montrer que

$$H(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y$$

est une intégrale première , i.e $H(x(t), y(t))$ =constante pour tout $t$(01pt)

Sol:**Il suffit de montrer que**

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = 0$$

**où x, et y vérifient le système.**

3) En déduire que les solutions de (1) sont bornées pour tout $t > 0$.

Sol:**Il suffit de remarquer que pour $x$ et $y$ assez grand, la fonction $H$ est surlineaire par rapport $x$ et**$y$.$(02pts)$

4) Montrer que les solutions de (1) sont positives.

Sol:Plusieurs méthodes sont déja exposés dans le cours, par exemple par comparaison où par séparation des variables.(02 pts)

**Partie II)**

1) Donner les points d'équilibre .

Sol:**Les points d'équilibre sont** $(0, 0)$ **et** $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ $(01pt)$

2) Montrer que

$$V(x, y) = H(x, y) - H(x_*, y_*)$$

où $(x_*, y_*)$ est un point d'équilibre de (1) , est une fonction de Lyapunov.(02pts)

3) En déduire la nature des points d'équilbre de (1).

Sol:**Par linéarisation, on montre que** $(0,0)$ **est instable.La fonction de lyapunov montre que** $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ **est stable.(02 pts)**

**Partie III)**

1) Montrer que toutes les solutions de (1) sont périodiques.(02 pts)

2)On définit les moyennes sur une période $T$, de la façon suivante (02 pts)

$$< x >= \frac{1}{T}\int_0^T x(s)ds$$

Montrer que

$$< x >= \frac{c}{d}, \text{ et } < y >= \frac{a}{b}$$

(voir le cours)

Exercice2 (03 pts)

a) Donner la définition d'un cycle limite

Sol:(voir le cours)

b) Un système linéaire admet il un cycle limite ? Expliquer pourquoi.

Solution:

Non, car si $x$ est un cycle limite, alors $\lambda x$ est aussi un cycle limite, pour tout$\lambda$, ce qui contredi le fait qu'un cycle limite est isolé.