Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2019-2020
Module : Contrôle des systèmes
Date : 02-02-2020

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

EXAMEN FINAL

Exercice 1 (10 points)

On considère le système commandé dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_1 - x_2 \\ \dot{x_2}(t) = (x_1 - x_2)(1 - 2\cos(x_1)) + \sin(2x_1) - u\cos(x_2), \end{cases}$$

le contrôle $u(\cdot)$ étant à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1) Supposons d'abord $u \equiv 0$. Montrer que $x = 0$ est un équilibre de l'équation différentielle ainsi obtenue et étudier sa stabilité.

2) Montrer que le linéarisé du système autour de l'équilibre $(x = 0; u = 0)$ est

$$\dot{\delta x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \delta u. \tag{1}$$

Dans la suite de l'exercice, on se restreint à l'étude du système linéarisé (1).

3) Etudier la contrôlabilité du système linéaire (1).

4) Montrer qu'il est possible de stabiliser (1) au moyen d'un retour d'état proportionnel c'est-à-dire avec $\delta u = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \delta x$.

Supposons maintenant que la sortie du système (1) est $y = \delta x_2$.

5) Avec cette sortie, le système (1) est-il observable ?

6) On utilise une commande de la forme $\delta u = k\delta x_2$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Existe-t-il une valeur de k pour laquelle l'origine est un équilibre asymptotiquement stable ?

Exercice 2 (10 points) : **Contrôle d'un système quantique à deux états.**

Nous prendrons ici le modèle de spin fictif $\frac{1}{2}$ associé à un système quantique à deux états. Nous le supposerons dans un champ magnétique co-linéaire au vecteur $\overrightarrow{B} = u\overrightarrow{e_1} + \Omega\overrightarrow{e_3}$ où $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3})$ est un trièdre ortho-normé, la constante $\Omega > 0$ est la pulsation de Larmor et u est le contrôle scalaire. Le système est décrit par les équations de Bloch avec comme état un vecteur $\overrightarrow{\sigma} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} \in \mathbb{R}^3$ obéissant à la dynamique

$$\dot{\overrightarrow{\sigma}}(t) = \overrightarrow{\sigma} \wedge \overrightarrow{B}, \tag{2}$$

où Λ est le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ euclidien :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}, \\ \overrightarrow{e_i} \wedge \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} \text{ pour } i = 1,2,3 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{\sigma} \wedge \overrightarrow{B}$.

2) Vérifier que le produit scalaire $\langle \overrightarrow{\sigma}, \overrightarrow{\sigma} \wedge \overrightarrow{B} \rangle = 0$.

3) En déduire que $\left\| \overrightarrow{\sigma} \right\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ est constante au cours du temps.

4) En utilisant l'équation (2) et la question 1) vérifier que

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x_1}(t) = \Omega x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) = -\Omega x_1(t) + u(t)x_3(t) \\ \dot{x_3}(t) = -u(t)x_2(t). \end{array}\right. \tag{3}$$

5) On suppose $u = \overline{u} \geq 0$ constant. Quels sont les points d'équilibre du système (3) sachant que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$?

6) On considère le point d'équilibre $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ associé à $\overline{u} = 0$.

6.1) Calculer le système linéarisé autour de ce point d'équilibre.

6.2) Ce système linéarisé est-il contrôlable ?

6.3) On considère le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\delta x_1}(t) = \Omega.\delta x_2 \\ \dot{\delta x_2}(t) = -\Omega.\delta x_1 + \delta u. \end{array}\right. \tag{4}$$

6.4) Construire un bouclage d'état $\delta u = -\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \delta x$ stabilisant le système (4) à 0 et exprimer les coefficients k_1 et k_2 en fonction des deux pôles $(p_1; p_2)$ en boucle fermée.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques.

A. U. : 2019-2020

Module : Contrôle des systèmes.

Niveau : Première Année Master Biomathématiques et Modelisation.

Corrigé de l'examen final du Dimanche 02 février 2020.

Exercice 1

1°) On a,

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ (x_1 - x_2)(1 - 2\cos(x_1)) + \sin(2x_1) \end{pmatrix},$$

où $x = (x_1, x_2)$.

Comme $f(0) = 0$, alors 0 est un équilibre de l'équation $x' = f(x)$.

Le linéarisé de l'équation en 0 est :

$$Df(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\det Df(0) = 2 > 0$ et $\operatorname{tr} Df(0) = 2 > 0$, alors l'équilibre $x = 0$ n'est pas stable.

2°) On pose,

$$f_1(x_1, x_2, u) = x_1 - x_2,$$

et

$$f_2(x_1, x_2, u) = (x_1 - x_2)(1 - 2\cos(x_1)) + \sin(2x_1) - u\cos(x_2).$$

Le linéarisé autour de l'équilibre $(x = 0 ; u = 0)$ est :

$$\dot{\delta x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(0,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(0,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0,0,0) \end{pmatrix} \delta x + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(0,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(0,0,0) \end{pmatrix} \delta u$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \delta u.$$

3°) Étudions la contrôlabilité du système linéarisé.

On pose par définition

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de Kalman C est :

$$C = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $rg(C) = 2$, alors le système linéaire

$$\dot{\delta x} = A\,\delta x + B\,\delta u,$$

est contrôlable.

4°) On a,

$$A + B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-k_1 & 1-k_2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique associé à $A+B(k_1\ k_2)$ est

$$P(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-1+k_2)+1-k_1$$

C'est-à-dire

$$P(\lambda) = \lambda^2+(k_2-2)\lambda+2-k_2-k_1$$

En utilisant le critère de Hurwitz les zéros de $P(\lambda)$ ont une partie réelle négative si

$$k_2-2>0 \text{ et } 2-k_2-k_1>0$$

C'est-à-dire, $k_2>2$ et $k_1<2-k_2$.

On prend par exemple

$$k_2=3 \text{ et } k_1=-2.$$

Sous cette condition le système

$$\dot{\delta x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-k_1 & 1-k_2 \end{pmatrix}\delta x$$

est asymptotiquement stable.

5°) On a,

$$\begin{cases} \dot{\delta x} = A\,\delta x + B\,\delta u \\ y = (0 \quad 1)\,\delta x \end{cases} \qquad (5.1)$$

On pose $C = (0 \quad 1)$

Calculons la matrice d'observabilité de Kalman O.

On a,

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $rg(O) = 2$, alors le système (5.1) est observable.

6°) On a,

$$A + B\,(0 \quad k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix} \quad (*)$$

Le polynôme caractéristique associé à $(*)$ est :

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= (\lambda - 1)(\lambda - 1 + k) + 1 \\ &= \lambda^2 + (k-2)\lambda + 2 - k \end{aligned}$$

Le critère de Hurwitz n'est pas satisfait et par suite l'origine n'est pas un équilibre asymptotiquement stable.

Alors k n'existe pas.

Exercice 2

1°) Calcul du produit vectoriel $\vec{\sigma} \wedge \vec{B}$.

On a,

$$\vec{\sigma} \wedge \vec{B} = (x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + x_3 \vec{e_3}) \wedge (u \vec{e_1} + \Omega \vec{e_3})$$

$$= -\Omega x_1 \vec{e_2} - x_2 u \vec{e_3} + \Omega x_2 \vec{e_1} + x_3 u \vec{e_2}$$

$$= \Omega x_2 \vec{e_1} + (-\Omega x_1 + x_3 u) \vec{e_2} - x_2 u \vec{e_3}$$

2°) Vérifions que $\langle \vec{\sigma}, \vec{\sigma} \wedge \vec{B} \rangle$.

On a,

$$\langle \vec{\sigma}, \vec{\sigma} \wedge \vec{B} \rangle$$

$$= \langle x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + x_3 \vec{e_3}, \Omega x_2 \vec{e_1} + (-\Omega x_1 + x_3 u) \vec{e_2} - x_2 u \vec{e_3} \rangle$$

$$= \Omega x_1 x_2 + x_2 (-\Omega x_1 + x_3 u) - x_2 x_3 u = 0.$$

3°) On a, $$\frac{d}{dt} \|\vec{\sigma}\|^2 = 2 \langle \vec{\sigma}, \vec{\sigma} \wedge \vec{B} \rangle$$
$$= 2.0 = 0.$$

Par suite $\|\sigma\|^2$ est constante au cours du temps.

4°) Comme,

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{r} \wedge \vec{B},$$

on obtient

$$\dot{x}_1(t)\vec{e}_1 + \dot{x}_2(t)\vec{e}_2 + \dot{x}_3(t)\vec{e}_3$$

$$= \Omega x_2 \vec{e}_1 + (-\Omega x_1 + u x_3)\vec{e}_2 - u x_2 \vec{e}_3.$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \Omega x_2 \\ \dot{x}_2(t) = -\Omega x_1 + u x_3 \\ \dot{x}_3(t) = -u x_2 ; \end{cases} \qquad (3)$$

5°) On suppose que $u = \bar{u} \geq 0$. Déterminons les points d'équilibre du système (3) sachant que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

(x_1, x_2, x_3) est un point d'équilibre du système (3) si

$$\begin{cases} \Omega x_2 = 0 \\ -\Omega x_1 + \bar{u} x_3 = 0 \\ -u x_2 = 0 \end{cases}$$

Comme $\Omega \neq 0$, on obtient

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \dfrac{\overline{u}}{\Omega} x_3 \end{cases}$$

Maintenant comme $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, il résulte que

$$\left(1 + \frac{\overline{u}^2}{\Omega^2}\right) x_3^2 = 1.$$

C'est-à-dire,

$$x_3 = \pm \sqrt{\frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \overline{u}^2}},$$

et par conséquent on a deux points d'équilibre

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{\overline{u}^2}{\Omega^2 + \overline{u}^2}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \overline{u}^2}}$$

6°)

6.1) Le système linéarisé autour du point d'équilibre $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ associé à $\overline{u} = 0$ est:

$$\delta \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta u$$

6.2°) On pose par définition

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \Omega & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons la matrice de Kalman C définie par

$$C = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix}.$$

On a,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \Omega & 0 \\ 1 & 0 & -\Omega^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $rg(C) = 2 \neq 3$, alors le système linéarisé n'est pas contrôlable.

6.3°) On pose par définition

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{K} = \begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}.$$

On a,

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega - k_1 & -k_2 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\lambda I_2 - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}) = \begin{pmatrix} \lambda & -\Omega \\ \Omega + k_1 & \lambda + k_2 \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^2 + k_2 \lambda + \Omega(\Omega + k_1) = 0 \qquad (**)$$

Si on choisit $k_2 > 0$ et $-k_1 < \Omega$, l'équation caractéristique admet deux solutions ayant une partie réelle négative.

Sous ces conditions et si on choisit par exemple $k_2^2 - 4\Omega(\Omega + k_1) > 0$, l'équation (**) admet deux solutions p_1 et p_2 données par

$$P_1 = \frac{-k_2 - \sqrt{+k_2^2 - 4\Omega(\Omega + k_1)}}{2}$$

et

$$P_2 = \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4\Omega(\Omega + k_1)}}{2},$$

et par conséquent

$$\boxed{k_2 = -P_1 - P_2} \quad \text{et} \quad \boxed{k_1 = -\Omega + \frac{P_1 P_2}{\Omega}}$$