Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2019-2020
Module : Contrôle des systèmes
Date : 06-01-2020

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

CONTRÔLE CONTINU

Exercice 1 (12 points) : Oscillateur harmonique

On considère le système de contrôle linéaire

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = u(t), \, t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \, \dot{x}(0) = v_0, \end{cases} \tag{1}$$

Le système (1) décrit le mouvement rectiligne d'un point matériel dont l'accélération résulte de la somme d'une force de rappel $-x(t)$ et d'une force extérieure déterminée par le contrôle $u(t)$.

1) Ecrire (1) comme un système différentiel d'ordre un à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (on notera $X(t) = (x(t), v(t))$ le vecteur d'état). Ce système est-il contrôlable ?

2)

2.1) Montrer que si le contrôle u est constant, alors la fonction $t \mapsto (x(t) - u)^2 + v^2(t)$ est constante sur $[0,T]$.

2.2) En déduire que si le contrôle u est constant, alors les trajectoires sont des cercles dans le plan (x,v) de centre $(u,0)$. Par la suite, il sera parfois commode de travailler en variables complexes en posant $z(t) = x(t) + iv(t)$ (i.e., on identifie le plan (x,v) à $\mathbb{C}$). Vérifier que

$$z(t) = e^{-it} z_0 + \int_0^t i e^{i(s-t)} u(s) ds,$$

avec $z_0 = x_0 + iv_0$.

3) On considère des contrôles bornés à valeurs dans $U = [-1,1]$, i.e., $u \in L^\infty([0,T];U)$. De plus, on fixe $T = \frac{\pi}{2}$ et la condition initiale est $X_0 = (0,0)$.

3.1) Tracer dans le plan (x,v) les trajectoires associées au contrôle $u_1 \equiv 1$ sur $[0,T]$, puis au contrôle $u_2 \equiv -1$ sur $[0,T]$.

3.2) Déterminer l'ensemble atteignable $A(T,X_0)$ si le contrôle u est constant.

3.3) Montrer que l'ensemble atteignable $A(T,X_0)$ est symétrique par rapport à l'origine ?

Exercice 2 (08 points)

On considère le système de contrôle dans $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \tag{2}$$

où $u(.)$ est un contrôle à valeurs réelles,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

avec a un paramètre réel.

1) Montrer que le système (2) n'est pas contrôlable.
2) Déterminer l'image de la matrice de Kalman.
3) En déduire $A(T;0)$, l'ensemble atteignable en temps T à partir de 0.
4) On suppose que $y = Px$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Ecrire le système (2) dans les coordonnées y.
5) On considère le système de contrôle en $y = (y_1; y_2; y_3)$ de la question précédente, et un contrôle sous forme de retour d'état, i.e., $u = k_1 y_1 + k_2 y_2$. Proposer des valeurs de k_1 et k_2 pour lesquelles les 3 composantes de y se comportent essentiellement en e^{-t} à un polynôme en t près.

Université Abou_Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A.U. : 2019_2020
Module : Contrôle des systèmes.

Niveau : Première Année Master Biomathématiques et Modélisation.

Corrigé du contrôle continu
du Lundi 06 janvier 2020.

Exercice 1

1°)

1.1°) On a

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \ t \in [0;T], \\ X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

1.2°) Étudions la contrôlabilité du système (1).

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice de Kalman C est donnée par

$$C = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $rg(C) = 2$, alors le système (1) est contrôlable.

2°)

2.1°) On suppose que la fonction u est constante.

Pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\frac{d}{dt}\left((x(t) - u)^2 + v^2(t)\right)$$

$$= 2v(t)\left(x(t) - u + \dot{v}(t)\right)$$

$$= 2v(t)\left(x(t) - u + \ddot{x}(t)\right)$$

$$= 0 \quad \text{car} \quad \ddot{x}(t) + x(t) = u.$$

Par suite la fonction $t \longmapsto (x(t)-u)^2 + v^2(t)$ est constante sur $[0,T]$.

2.2°)

2.2°.1) D'après la question précédente, il résulte que la fonction u est constante, les trajectoires dans le plan (x,v) sont des cercles de centre $(u,0)$.

2.2.2) On a,

$$\begin{aligned}\dot{Z}(t) &= \dot{x}(t) + i\dot{v}(t) \\ &= v(t) + i(u(t) - x(t)) \\ &= -i\left(x(t) + iv(t)\right) + iu(t) \\ &= -iZ(t) + iu(t)\end{aligned}$$

Alors

$$\dot{Z}(t) + iZ(t) = iu(t).$$

Ce qui donne,

$$\dot{\overbrace{e^{it}Z(t)}} = ie^{it}u(t)$$

Par suite,

$$e^{it} z(t) - z_0 = \int_0^t i e^{is} u(s)\, ds.$$

Ce qui donne,

$$z(t) = e^{-it} z_0 + \int_0^t i e^{i(s-t)} u(s)\, ds.$$

3°)

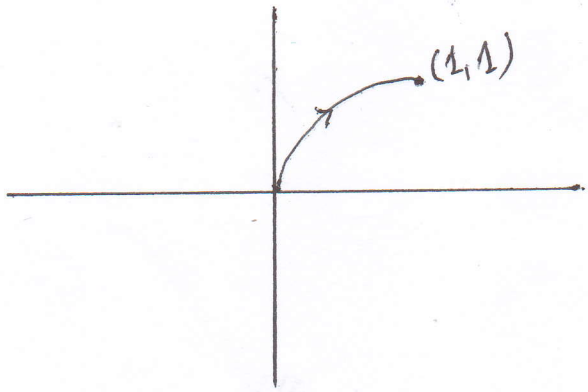
3.1°)

3.1.1°) Si $u \equiv 1$, on a :

$$z(t) = \int_0^t i e^{i(s-t)}\, ds \quad \text{car } z_0 = 0.$$

$$= 1 - e^{-it}$$

Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la trajectoire est un arc de cercle de centre $(1,0)$ orienté dans le sens négatif.



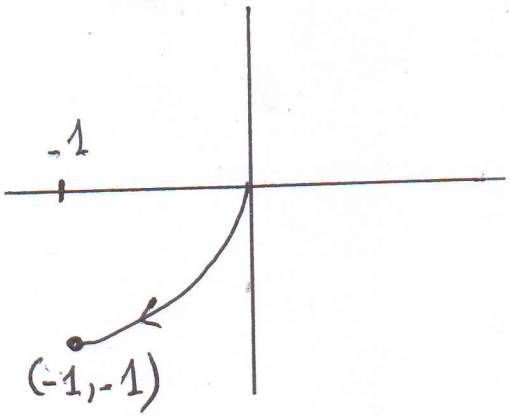
3.1. 2°) Si $u \equiv -1$, on a

$$Z(t) = \int_0^t -i e^{i(s-t)}\, ds$$

$$= -\left[e^{i(s-t)} \right]_0^t$$

$$= -1 + e^{-it}$$

Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la trajectoire est un arc de cercle de centre $(-1, 0)$ orienté dans le sens négatif.



3.2°) On suppose que u est constant.

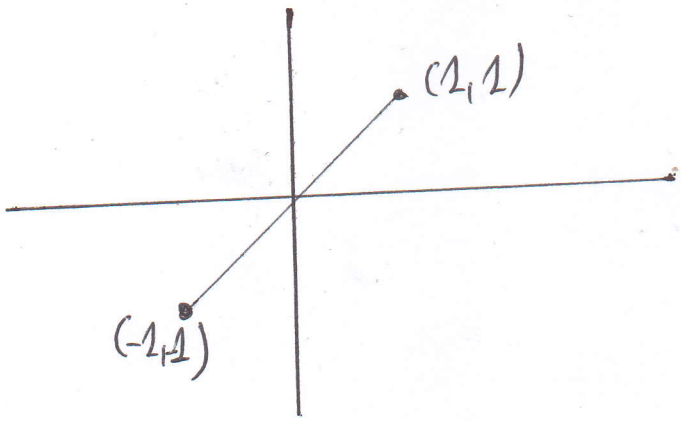
On a, $A(T, X_0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{array}{l} x_1 = x(T), \\ x_2 = v(T) \\ \text{avec } u \in [-1, 1] \end{array} \right\}$

Comme $T = \frac{\pi}{2}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a

$$Z\left(\frac{\pi}{2}\right) = u\left[1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right]$$
$$= (1+i)u,$$

et par conséquent

$$A(T, X_0) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} / u \in [-1, 1] \right\}.$$



$A(T, X_0)$ est le segment joignant $(-1,-1)$ et $(1,1)$.

3.3°) $A(T, X_0)$ est symétrique par rapport à l'origine car si $\begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} \in A(T, X_0)$, alors $\begin{pmatrix} -u \\ -u \end{pmatrix} \in A(T, X_0)$.

Exercice 2

1°) Montrons que le système (2) n'est pas contrôlable.

Pour cela calculons le rang de la matrice de Kalman $C = (B \;\; AB \;\; A^2B)$.

On a,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Comme $rg(C) = 2 \neq 3$, alors le système (2) n'est pas contrôlable.

2°) Détermination de l'image de la matrice de Kalman.

On a,

$$\operatorname{Im} C = \left\{ C.\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 - a y_3 \\ y_2 \\ -y_1 + a y_3 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3°) On a,

$$A(T, 0) = \operatorname{Im} C$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

4°) On a,

$$y = Px = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_1 + x_3 \end{cases} \quad \text{avec } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Par suite d'après (2), il resulte que

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -a y_2 + y_3 + u \\ \dot{y}_2 = y_1 \\ \dot{y}_3 = -y_3 . \end{cases}$$

5°) On a,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Si on suppose que $u = k_1 y_1 + k_2 y_2$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & -a+k_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminons k_1 et k_2 pour lesquelles les 3 composantes de y se comportent essentiellement en e^{-t} à un polynôme en t pré.

On a,

$$\lambda I_3 - \begin{pmatrix} k_1 & -a+k_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda - k_1 & a - k_2 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est :

$$(\lambda+1)\left[\lambda(\lambda-k_1)+a-k_2\right]$$

$\lambda = -1$ est une valeur propre d'ordre multiplicité 3 si

$$\begin{cases} -k_1 = 2 \\ a - k_2 = 1 \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = a-1. \end{cases}$$

Pour ces valeurs de k_1 et k_2 les trois composantes de y se comportent essentiellement en e^{-t} à un polynôme en t pré.