1. Université de Tlemcen, Département de Mahématiques, Module:Transformations Intégrales, Examen de Rattrapage 2019-2020

Corrigé

Exercice1.(08 pts)

Soit l'équation
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ \ 0 < x < l, \quad t > 0 \qquad ((\mathrm{E}))$$
avec les conditions au bord
$$y(0,t) = 0, \qquad t > 0$$
$$y(l,t) = a, \qquad t > 0$$

et les conditions initiales

$$y(x,0) = 0, \qquad 0 < x < l$$
$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad 0 < x < l.$$

Résoudre (E) en utilisant la transformée de Laplace.

Solution:

Appliquons la transformée de Laplace à (E) nous obtenons

$$\frac{d^2Y(x,s)}{dx^2} - s^2 Y(x,s) = 0 \qquad (\mathbf{01pt})$$

La solution est donnée par

$$Y(x,s) = c_1 \cosh sx + c_2 \sinh sx \qquad (\mathbf{1p})$$

(remarquons que nous pouvons écrire la solution avec e^{sx})

La condition au limite en en $x = 0$ donne $Y(0,s) = c_1 = 0$ et $Y(x,s) = c_2 \sinh sx$.La condition en $x = l$ donne

$$Y(l,s) = \frac{a}{s} = c_2 \sinh sl$$

et
$$c_2 = \frac{a}{s \sinh sl}$$

ainsi
$$Y(x,s) = \frac{a \sinh sx}{s \sinh sl} \quad (\mathbf{1pts})$$

qui admet les pôles simples suivants

$$s_n = \frac{n\pi i}{l} \text{ pour n=0,} \pm 1, \pm 2, ...(\mathbf{1pt})$$

pour calculer la transformation inverse, on doit calculer les résidus:

$$\operatorname{Re} s(0) = \lim{}_{s\to 0} s e^{rs} \frac{a \sinh sx}{s \sinh sl} = \frac{ax}{l} \qquad (\mathbf{1pt})$$

d'une manière similaire

$$\operatorname{Re} s(\frac{n\pi i}{l}) = \frac{a}{n\pi} (-1)^n e^{\frac{n\pi i t}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (\mathbf{1pt})$$

Finalement , la solution est

$$y(x,t) = \sum \operatorname{Re} s = \frac{ax}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi t}{l} \quad (\mathbf{2pt})$$

Exercice 2.(06 pts)

Soient $f, g \in L^1(R)$, montrer que

$$(f * g)(x) = \int_R f(x-y) g(y) dy$$

est bien définie.

Solution:La fonction

$$F(x,y) = f(x-y) g(y)$$

vérifie

$$\int_R |F(x,y)| \, dx = |g(y)| \int_R |f(x-y)| \, dy = \|f\|_{L^1}$$

et

$$\int_R \int_R |F(x,y)| \, dxdy = \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^1}$$

Le théorème de Tonnelli implique que

$$F(x,y) \in L^1(R \times R)$$

Le résultat découle du théorème de Fubini.
Exercice 3.(06 pts)
a) Soit $a > 0$.Calculer la transformée de Laplace de $f(x) = |cos(ax)|$
b) Calculer $L(x^\alpha)$, $\alpha > -1$.

Solution:

a) La fonction $f(x)$ est $\frac{2\pi}{a}$ périodique, alors $L(f)(p)=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-px}\left|cos(ax)\right|dx =$

$\frac{1}{1-e^{-p\frac{2\pi}{a}}}\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{a}} e^{-px}\left|cos(ax)\right|dx = \frac{p}{p^2+a^2} + \frac{1}{(p^2+a^2)\sinh\left(\frac{p\pi}{2a}\right)}$ (**03pts**)

b) $L(x^{\alpha}) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-px}x^{\alpha}dx$

Posons$px = u$, il vient alors $L(x^{\alpha}) = p^{-\alpha-1}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha}du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$ **(03 pts)**