Dept. Mathématiques
A.U. 2019-2020

Epreuve de rattrapage: Géométrie Différentielle
(Durée 1h30)

Exercice1
On considère les fonctions $f : R^2 \to R^3$ et $g : R^3 \to R$ définies par:
$f(x,y) = (\sin(xy), y\cos x, xy\sin(xy).e^{y^2})$, $g(u,v,w) = uvw$.
1-Calculer explicitement gof.
2-En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de gof.
3-Déterminer les matrices jacobiennes $Df(x,y)$, $Dg(u,v,w)$ de f et de g.
4-Retrouver les résultats sous (2) en utilisant un produit approprié des matrices jacbiennes.
.
Exercice2
1) Montrer que l'application $f : R \to R^2$, $f(t) = (\sin t, \sin 3t)$ est une immersion.
2) Montrer que l'application $f : R^3 \to R^2$, $f(x,y,z) = (y,z)$ est une submersion.
.
Exercice3
Montrer que l'ensemble $S = \{(x,y,z) \in R^3 : xy + xz + 2x + 2y - z = 0\}$ est une sous-variété de R^3 de dimension 2.

Corrections:

Exercice1 (9 points)
1-Calcul de gof :

$$gof(x,y) = xy^2e^{y^2}\cos x\sin^2(xy).$$

2-Calcul des dérivées partielles de $h = gof$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= y^2e^{y^2}\cos x\sin^2(xy) - xy^2e^{y^2}\sin x\sin^2(xy) + 2xy^3e^{y^2}\cos x\cos(xy)\sin(xy)\\ &= y^2e^{y^2}\sin(xy)\left(\cos x\sin(xy) - x\sin x\sin(xy) + 2xy\cos x\cos(xy)\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= 2xye^{y^2}\cos x\sin^2(xy)+2xy^3e^{y^2}\cos x\sin^2(xy)+2x^2y^2e^{y^2}\cos x\sin(xy)\cos(xy)\\ &= 2xye^{y^2}\cos x\sin(xy)\left(\sin(xy)+y^2\sin(xy)+xy\cos(xy)\right).\end{aligned}$$

3-Matrices jacobiennes de f et de g.

$$Df(x,y)=\begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy)\\ -y\sin x & \cos x\\ ye^{y^2}(\sin(xy)+xy\cos(xy)) & xe^{y^2}(\sin(xy)+xy\cos(xy)+2y^2\sin(xy))\end{pmatrix}$$

et

$$Dg(u,v,w)=(vw,uw,uv).$$

4-Résultats sous (2)

Nous avons:

$$Dh(x,y)=Dg(f(x,y)).Df(x,y)$$

or

$$Dg(f(x,y))=\left(xy^2e^{y^2}\cos x\sin(xy),xye^{y^2}\sin^2(xy),y\cos x\sin(xy)\right)$$

ce qui donne

$$Dh(x,y)=\left(xy^2e^{y^2}\cos x\sin(xy),xye^{y^2}\sin^2(xy),y\cos x\sin(xy)\right)\times$$

$$\begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy)\\ -y\sin x & \cos x\\ ye^{y^2}(\sin(xy)+xy\cos(xy)) & xe^{y^2}(\sin(xy)+xy\cos(xy)+2y^2\sin(xy))\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y),\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right)$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= xy^3e^{y^2}\cos x\sin(xy)\cos(xy)-xy^2e^{y^2}\sin x\sin^2(xy)+y^2e^{y^2}\cos x\sin(xy)(\sin(xy)\\ &\quad +xy\cos(xy))\end{aligned}$$

$$=y^2e^{y^2}\sin(xy)\left(2xy\cos x\cos(xy)-x\sin x\sin(xy)+\cos x\cos(xy)\right)$$

de même

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= x^2y^2e^{y^2}\cos x\cos(xy)\sin(xy) + xye^{y^2}\cos x\sin^2(xy) \\
&\quad + xye^{y^2}\cos x\sin(xy)\left(\sin(xy) + xy\cos(xy) + 2y^2\sin(xy)\right)
\end{aligned}
$$

$$
= 2xye^{y^2}\cos x\sin(xy)\left(\sin(xy) + xy\cos(xy) + y^2\sin(xy)\right).
$$

Exercice2: (6 points)

1-f est une immersion:

En effet, puisque f est périodique de période 2π, il suffit d'étudier f dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Nous avons

$$
f'(t) = (\cos t, 3\cos 3t) \neq (0,0)
$$

car sinon on aura: $\cos t = 0$ et $\cos 3t = 0$ la première donne $t = \pm\frac{\pi}{2}$ et la deuxième donne $t = \pm\frac{\pi}{6}$. $f'(t)$ est de rang 1 et par conséquent f est une immersion.

2-f est une submersion:

$$
Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

qui est de rang $2 = \dim R^2$ et par conséquent f est une immersion.

Exercice3 (5 points)

S est une sous-variété de R^3.

Posons $f(x,y,z) = xy + xz + 2x + 2y - z$ alors f est de classe C^∞ et $S = f^{-1}(\{0\})$.

De plus pour tout $(x,y,z) \in S$:

$$
Df(x,y,z) = (y + z + 2, x + 2, x - 1)
$$

qui est différent de $(0,0,0)$ car sinon on aura $x = -2$ et $x = 1$ ce qui est impossible.

S est une sous-variété de R^3de classe C^∞ et de dimension 2 (surface lisse).