Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3^e Année Licence – S6 — Novembre 2020

Equations aux Dérivées Partielles — Examen de Rattrapage — 1H30

Exercice 1(7pts):

Soit G le secteur angulaire plan défini par $G = \{(r,\theta);\ 0 < \theta < \pi/4,\quad 0 < r < 1\}$.

En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver la fonction $u(r,\theta)$ *solution du problème suivant,*

$$(\mathcal{S})\quad \begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad \text{dans } G \\ u(r,0) = 0 = u(r,\pi/4),\ \ 0 \le r \le 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) = \cos\theta,\ \ 0 \le \theta \le \pi/4. \end{cases}$$

Exercice 2(5pts):

Soit γ *un nombre réel,* $\gamma > 1$. *On considère l'équation suivante de l'inconnue* $v: x \longmapsto v(x)$;

$$-\Delta(v^\gamma) = \beta v, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \qquad (\mathcal{P})$$

où β *est un paramètre réel non nul.*

On pose pour $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$; $v(x) = |x|^\alpha = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{\alpha}{2}}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

1. *Calculer* $\Delta(v^\gamma)$.
2. *En déduire la valeur de* α *pour laquelle* $v(x) = |x|^\alpha$ *est solution de l'équation* $(\mathcal{P})$.

Exercice 3(8pts):

On considère le problème suivant,

$$(\mathcal{P}_f)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx}\ ;\ \ 0 < x < L,\ \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t);\ t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x);\ 0 \le x \le L, \end{cases}$$

où f est une fonction continue par morceaux sur $[0,\ L]$.

1. *On suppose que* $f \equiv 0$ *et on pose*

$$J(t) = \int_0^L \big(u(x,t)\big)^2 dx.$$

   a. *Montrer que la fonction J est décroissante sur* $[0,+\infty[$.
   b. *En déduire que la solution du problème* $(\mathcal{P}_0)$ *est* $u \equiv 0$.
2. *Montrer que si le problème* $(\mathcal{P}_f)$ *admet une solution alors celle-ci est unique.*
3. *Résoudre le problème* $(\mathcal{P}_f)$.

Bon Courage

Corrigé

Exercice 1(7pts):

Le secteur angulaire plan G défini par $G = \{(r,\theta);\ \ 0 < \theta < \pi/4,\ \ \ 0 < r < 1\}$.

Déterminons la fonction $u(r,\theta)$ *solution du problème suivant,*

$$(\mathcal{S})\quad \begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad \ dans\ \ G \\ u(r,0\,) = 0 = u(r,\pi/4\,),\ \ 0 \le r \le 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) = \cos\theta,\ \ 0 \le \theta \le \pi/4. \end{cases}$$

On cherchera une solution au moins continue.

Posons $u(r,\theta\,) = R(r)T(\theta)$, *et portons dans l'équation, nous obtenons après division par* $R(r)T(\theta)$:

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{T''}{T}.\quad \mathbf{(0,5\ \mathit{pt})}$$

Les variables r et θ étant indépendantes, les deux membres sont alors constants, on a

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = \lambda = -\frac{T''}{T}\ ,\ \ \lambda\ \ constante\ réelle.\quad \mathbf{(0,5\ \mathit{pt})}$$

On obtient les deux équations suivantes : $\mathbf{(2 \times 0,5\ \mathit{pt})}$

$$\begin{cases} T'' + \lambda T = 0 \\ r^2R'' + rR' - \lambda R = 0. \end{cases}$$

a. $T'' + \lambda T = 0$

- *Si* $\lambda \le 0$, *puisque* $T(0) = 0 = T(\pi/4)$ *alors* $T \equiv 0$.
- *Si* $\lambda > 0$ *alors* $T(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta) + B\ \sin(\sqrt{\lambda}\,\theta)$.

Déterminons les coefficients A et B.

Des conditions $T(0) = 0 = T(\pi/4)$, *nous obtenons*

$$A = 0\ \ et\ \ B\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi/4) = 0.$$

Comme on cherche une solution T non identiquement nulle, on prend $\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi/4) = 0$.

$$\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi/4) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\,\pi/4 = n\pi,\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où $\lambda = (4n)^2\ , n \in \mathbb{N}^*$.

La famille des solutions de l'équation en T est :

$$T_n(\theta) = B_n\sin(4n\theta)\,,\qquad n \in \mathbb{N}^*.\ \mathbf{(1\ \mathit{pt})}$$

b. *Résolvons l'équation en R:* $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$, *pour* $\lambda = (4n)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

L'équation $\quad r^2R'' + rR' - (4n)^2R = 0,$

est une équation d'Euler, posons $R\,(r) = r^\alpha$ *et remplaçons dans l'équation, nous obtenons*

$$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - (4n)^2r^\alpha = 0$$

Ceci nous donne

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - (4n)^2 = 0\qquad d'où\qquad \alpha = \pm 4n.$$

Et la solution cherchée est, $R(r) = Dr^{4n} + Er^{-4n}$.

Comme R doit-être définie et continue en $r = 0$, *on prend* $E = 0$ *et par suite*

$$R(r) = Dr^{4n}.$$

La famille des solutions de l'équation en R est

$$R_n(r) = D_n r^{4n}, \qquad n \in \mathbb{N}^*. \quad (\mathbf{2\ pts})$$

Par le principe de superposition la solution de $(\mathcal{S})$ *est*

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(r)T_n(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n r^{4n}\sin(4n\theta) \quad (\mathbf{0{,}5\ pt})$$

où l'on a posé $C_n = B_n D_n$.

Déterminons les coefficients C_n*:*

La condition au bord non homogène $\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) = \cos\theta$ *nous donne*

$$\cos\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} 4n\, C_n \sin(4n\theta).$$

Par multiplication par $\sin(4k\theta)$ *et intégration sur* $]0,\ \pi/4[$ *on obtient*

$$\int_0^{\pi/4} \sin(4k\theta)\cos\theta\, d\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} 4n\, C_n \int_0^{\pi/4} \sin(4k\theta)\sin(4n\theta) d\theta,$$

Comme

$$\int_0^{\pi/4} \sin(4k\theta)\sin(4n\theta) d\theta = 0, \quad si\ n \neq k.$$

Nous obtenons

$$\int_0^{\pi/4} \sin(4k\theta)\cos\theta\, d\theta = 4kC_k \int_0^{\pi/4} \sin^2(4k\theta)\, d\theta$$

D'où

$$\frac{4-(-1)^k 2\sqrt{2}}{16k^2-1}k = k\frac{\pi}{2}C_k.$$

Et finalement on obtient

$$C_k = \frac{8-(-1)^k 4\sqrt{2}}{(16k^2-1)\pi}, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (\mathbf{1{,}5\ pt})$$

Exercice 2(5pts):

Soient $\gamma > 1$ *un nombre réel et* $v: x \longmapsto v(x)$ *solution de l'équation suivante*

$$-\Delta(v^\gamma) = \beta v, \quad dans \ \mathbb{R}^n \quad (\mathcal{P})$$

où β *est un paramètre réel non nul.*

Pour $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$; $v(x) = |x|^\alpha = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{\alpha}{2}}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.

1. *Calculons* $\Delta(v^\gamma)$. *Nous avons*

$$\Delta(v^\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v^\gamma}{\partial x_i^2}$$

$$v^\gamma(x) = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{\alpha\gamma}{2}} \Longrightarrow \frac{\partial v^\gamma}{\partial x_i}(x) = \alpha\gamma x_i (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{\alpha\gamma}{2}-1}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 v^\gamma}{\partial x_i^2}(x) = \alpha\gamma(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{\alpha\gamma}{2}-1} + \alpha\gamma(\alpha\gamma - 2)x_i^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{\alpha\gamma}{2}-2}$$

$$\frac{\partial^2 v^\gamma}{\partial x_i^2}(x) = \alpha\gamma|x|^{\alpha\gamma-2} + \alpha\gamma(\alpha\gamma - 2)x_i^2|x|^{\alpha\gamma-4} = \alpha\gamma|x|^{\alpha\gamma-4}\left(|x|^2 + (\alpha\gamma - 2)x_i^2\right). \ \mathbf{(1\ pt)}$$

Ce qui donne

$$\Delta v^\gamma(x) = \alpha\gamma|x|^{\alpha\gamma-4}\sum_{i=1}^{n}(|x|^2 + (\alpha\gamma - 2)x_i^2) = \alpha\gamma|x|^{\alpha\gamma-4}(n|x|^2 + (\alpha\gamma - 2)|x|^2)$$

$$\Delta v^\gamma(x) = \alpha\gamma(n + \alpha\gamma - 2)|x|^{\alpha\gamma-2} \mathbf{(1,5\ pt)}$$

2. *Déterminons* α *telle que* $v(x) = |x|^\alpha$ *soit solution de l'équation* $(\mathcal{P})$.

$$-\Delta(v^\gamma) = \beta v \Longrightarrow \alpha\gamma(2 - n - \alpha\gamma)|x|^{\alpha\gamma-2} = \beta|x|^\alpha$$

$$\Longrightarrow (\alpha\gamma - 2 = \alpha \ \ et \ \ \alpha\gamma(2 - n - \alpha\gamma) = \beta)$$

De la première équation on a $\alpha\gamma = \alpha + 2$, *d'où*

$$\alpha = \frac{2}{\gamma - 1} > 0, \qquad car \ \gamma > 1 \ \mathbf{(2\ pts)}$$

Et la deuxième équation nous donne la valeur du paramètre β

$$\beta = -(\alpha + 2)(\alpha + n) = -\frac{2\gamma(n(\gamma - 1) + 2)}{(\gamma - 1)^2} < 0. \ \mathbf{(0,5\ pt)}$$

Exercice 3(8pts):

On considère le problème suivant,

$$(\mathcal{P}_f)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx}\,; \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t);\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x);\ 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

où f est une fonction continue par morceaux sur $[0,\ L]$.

1. On suppose que $f \equiv 0$ et on pose

$$J(t) = \int_0^L \big(u(x,t)\big)^2 dx.$$

a. Montrons que la fonction J est décroissante sur $[0,+\infty[$. **(1 pt)**

La fonction $t \longmapsto u(x,t)$ est au moins de classe C^1, donc J est dérivable sur $]0,+\infty[$, et

$$J'(t) = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\big(u(x,t)\big)^2 dx = 2\int_0^L u(x,t)u_t(x,t)dx = 2\int_0^L u(x,t)u_{xx}(x,t)dx\,.$$

Une intégration par parties donne,

$$J'(t) = 2[u(x,t)u_x(x,t)]_{x=0}^{x=L} - 2\int_0^L \big(u_x(x,t)\big)^2 dx = -2\int_0^L \big(u_x(x,t)\big)^2 dx,$$

car $u(0,t) = 0 = u(L,t)$. Ainsi $J'(t) \leq 0, \forall t \in\,]0,+\infty[$ et J est décroissante $[0,+\infty[$.

b. La fonction J est décroissante sur $[0,+\infty[$, d'où $J(t) \leq J(0) = 0$, pour tout $t \geq 0$.

Mais J est positive sur $[0,+\infty[$, donc $J \equiv 0$ et par suite $u \equiv 0$. **(1 pt)**

On conclut que la solution du problème $(\mathcal{P}_0)$ est nulle.

2. Montrons que si le problème $(\mathcal{P}_f)$ admet une solution alors celle-ci est unique.

Supposons, par l'absurde, que $(\mathcal{P}_f)$ admet deux solutions v et w.

La fonction $u = v - w$ est solution du problème $(\mathcal{P}_0)$ puisque

$$u(x,0) = v(x,0) - w(x,0) = f(x) - f(x) = 0.$$

D'après la question précédente, $u = 0$ d'où $v = w$. **(1 pt)**

3. Résolvons le problème $(\mathcal{P}_f)$.

Par la méthode de séparation de variables, posons $u(x,t) = X(x)T(t)$. **(0,5 pt)**

L'équation s'écrit

$$XT' = X''T \quad d'\text{où} \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T}\,.$$

Les variables sont indépendantes d'où

$$\frac{X''}{X} = \lambda = \frac{T'}{T} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}), \qquad \textbf{(0,5 pt)}$$

et on a **(2 × 0,5 *pt*)**

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, & X(0) = 0 = X(L), \\ T' - \lambda T = 0. \end{cases}$$

- *Résolution de l'équation en X :*

Si $\lambda \geq 0$, *nous obtenons la solution triviale.*

Si $\lambda < 0$ *alors* $X(x) = A\cos\left(x\sqrt{-\lambda}\right) + B\sin\left(x\sqrt{-\lambda}\right)$

et des conditions aux limites, il s'ensuit que

$$A = 0, \quad B\sin\left(L\sqrt{-\lambda}\right) = 0.$$

La solution est non triviale pour $L\sqrt{-\lambda} = n\pi\,, n \in \mathbb{N}^*$ *i.e.* $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \ (n \in \mathbb{N}^*)$.
La famille des solutions de l'équation en X est,

$$X_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \ (n \in \mathbb{N}^*).$$ **(1 *pt*)**

- *Résolution de l'équation en T: Pour* $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad T' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T = 0.$

L'équation s'écrit $(T \not\equiv 0)$,

$$\frac{dT}{T} = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 dt,$$

d'où $\ln|DT| = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t$, *(D constante réelle non nulle)*

et donc $T(t) = \frac{1}{D}\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)$.

La famille des solutions en T est, $T_n(t) = b_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right), \ (n \in \mathbb{N}^*)$. **(1 *pt*)**

Ainsi nous obtenons la famille de solutions suivante:

$$u_n(x,t) = d_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right), \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$ **(0,5 *pt*)**

La solution du problème est donc

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right).$$

Déterminons à présent les coefficients d_n*: On a* $u(x,0) = f(x)$ *d'où*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

On reconnaît le développement en série de Fourier sinus, d'où

$$d_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\,.$$ **(0,5 *pt*)**

et finalement

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)\int_0^L f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy.$$