Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3^e Année Licence – S6 — Octobre 2020

Equations aux Dérivées Partielles — Examen Final — 1h30

Exercice 1(7pts):

1. Soient v et w les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ par

$$v(x) = |x|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \qquad\qquad w(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x_k^2$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Le laplacien d'une fonction u deux fois différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

a. Calculer Δv et Δw.

b. Dans quel cas la fonction w est-elle harmonique ?

2. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ une fonction non identiquement constante.

a. Justifier l'existence du $\max_{\overline{\Omega}} u$ et $\max_{\partial\Omega} u$ où $\partial\Omega$ est la frontière de Ω.

b. On suppose que la fonction u est harmonique.

Montrer alors que u atteint son maximum sur $\partial\Omega$ i.e. $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

Indication: Considérer la famille de fonctions u_ε $(\varepsilon \geq 0)$ définies sur Ω par

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2$$

et montrer, par l'absurde, que u_ε n'admet pas de maximum dans Ω.

Exercice 2(8pts):

Déterminer la solution $v = v(x,t)$ du problème suivant

$$\begin{cases} v_t = 4v_{xx}; & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, & v(1,t) = 0; \quad t \geq 0, \\ v(x,0) = f(x); & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Où f est une fonction continue.

Exercice 3(5pts):

Soit u une fonction régulière solution de l'équation de la chaleur,

$$u_t = u_{xx} \text{ dans } \mathbb{R} \times]0, +\infty[.$$

1. *Montrer que, $u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ est aussi solution de l'équation de la chaleur pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
2. *Montrer que $v(x, t) = x u_x(x, t) + 2t u_t(x, t)$ résout également l'équation de la chaleur.*

Bon Courage

Corrigé

***Exercice 1(7pts)*:**

1. Les fonctions v et w sont définies sur $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ par

$$v(x) = |x|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \qquad\qquad w(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x_k^2$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

a. Calculons Δv et Δw.

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = 2x_i \implies \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = 2$$

D'où

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n. \quad \textbf{(1 pt)}$$

De même

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = 2(-1)^i x_i \implies \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = 2(-1)^i$$

et par suite

$$\Delta w = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = 2\sum_{i=1}^{n} (-1)^i. \quad \textbf{(1 pt)}$$

b. La fonction w est harmonique si $\Delta w = 0$.

$$\Delta w = 0 \implies 2(-1 + 1 - \dots + (-1)^n) = 0 \implies n \text{ pair}.$$

La fonction w est harmonique dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si n est pair. **(1 pt)**

2. Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ une fonction non identiquement constante où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

a. Les ensembles $\overline{\Omega}$ et $\partial\Omega$ sont fermés et bornés dans $\mathbb{R}^n$ donc compacts et la fonction u est continue sur $\overline{\Omega}$, par conséquent elle atteint ses maxima dans $\overline{\Omega}$ et sur $\partial\Omega$. **(1,5 pt)**

b. On suppose que la fonction u est harmonique.

Montrons que u atteint son maximum sur $\partial\Omega$ i.e. $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

Si u est constante ce résultat est évident.

Supposons que u est non constante et considérons la famille de fonctions u_ε $(\varepsilon \geq 0)$ définies sur Ω par

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2.$$

On a $u_0 = u$.

Pour tout $\varepsilon \geq 0$ la fonction u_ε est continue sur le compact $\overline{\Omega}$ donc atteint son maximum en un point $x_0 \in \overline{\Omega}$. **(0,5 pt)**

Supposons que $x_0 \in \Omega$.. *Comme la fonction* $u_\varepsilon \in C^2(\Omega)$ $\left(en\, fait\; u_\varepsilon \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\right)$ *alors*

$$\nabla u_\varepsilon(\,x_0) = 0 \;\; et \;\; H_\varepsilon(x_0) := \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{x_i x_j}(x_0)\right)_{1\le i,j\le n} \quad est\ définie\ négative.\ \mathbf{(1\ pt)}$$

En particulier $\Delta u_\varepsilon(\,x_0) = tr\left(H_\varepsilon(x_0)\right) < 0. \qquad (*)$

La fonction u *étant harmonique donc* $\Delta u_\varepsilon(\,x_0) = \Delta u(x_0) + 2\varepsilon n = 2\varepsilon n \ge 0$

ce qui est en contradiction avec $(*)$. **(1 pt)**

En conclusion u_ε *atteint son maximum sur* $\partial\Omega$. *Ceci est vrai pour tout* $\varepsilon \ge 0$, *en particulier pour* $u_0 = u$ *et donc* $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

***Exercice 2(8pts)*:**

Déterminons $v = v(x,t)$ *solution du problème suivant*

$$(P)\begin{cases} v_t = 4v_{xx}; & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, & v(1,t) = 0; \quad t \ge 0, \\ v(x,0) = f(x); & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

f *étant une fonction continue.*

Posons, selon la méthode de séparation des variables, $v(x,t) = X(x)T(t)$. **(0,5 pt)**

Les conditions aux bords nous donnent

$$\left.\begin{matrix} v(0,t) = 0 \\ v(1,t) = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(1)T(t) = 0 \end{cases}$$

Ces équations sont vraies pour tout $t \ge 0$, *d'où* $X(0) = X(1) = 0$.

$$v_t = 4v_{xx} \Longrightarrow XT' = 4X''T$$

Nous cherchons des solutions non triviales d'où

$$\frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X}.$$

Puisque les variables x *et* t *sont indépendantes, il existe une constante réelle* λ *telle que*

$$\frac{T'}{4T} = \lambda = \frac{X''}{X}. \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

Nous obtenons ainsi les équations différentielles suivantes,

$$T' - 4\lambda T = 0 \quad (1) \qquad\qquad X'' - \lambda X = 0 \quad (2) \quad \mathbf{(1\ pt)}$$

Résolvons l'équation (1) **(2 pts)**

$$(1) \Longrightarrow \frac{dT}{T} = 4\lambda dt \Longrightarrow \ln|T| = 4\lambda t + A \Longrightarrow T(t) = Ke^{4\lambda t}, \;\; (A, K \in \mathbb{R})$$

Passons à l'équation (2) **(2 pts)**

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

L'équation caractéristique est $r^2 = \lambda$

- *Si* $\lambda \ge 0$ *alors en utilisant les conditions aux bords on trouve,* $X \equiv 0$.
- *Si* $\lambda < 0$, $\lambda = -\alpha^2$ *avec* $\alpha > 0$ *alors*

$$X(x) = C_1\cos(\alpha x) + C_2\sin(\alpha x).$$

On a, $X(0) = 0$ *d'où* $C_1 = 0$ *et par suite* $X(x) = C_2 \sin(\alpha x)$.
Et la condition $X(1) = 0$ *donne*

$$C_2 \sin \alpha = 0.$$

Comme nous cherchons des solutions non triviales nous prenons $\sin \alpha = 0$.

$$\sin \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = n\pi, \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Une famille de solutions en x est

$$X_n(x) = a_n \sin(n\pi x) \qquad (a_n \in \mathbb{R})$$

En remplaçant λ *par* $-(n\pi)^2$ *dans l'expression de T, nous obtenons la famille de solutions de l'équation en t*

$$T_n(t) = b_n e^{-(2n\pi)^2 t} \qquad (b_n \in \mathbb{R})$$

Ainsi une famille de solutions du problème de départ est

$$v_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n e^{-(2n\pi)^2 t} \sin(n\pi x) \qquad (c_n \in \mathbb{R})$$

Par le principe de superposition, la solution de (P) *est*

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n\pi)^2 t} \sin(n\pi x). \quad \textbf{(1 pt)}$$

Déterminons les coefficients c_n.
Nous avons $v(x,0) = f(x)$ *d'où*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x).$$

En multipliant par $\sin(k\pi x)$ *et intégrant sur* $[0, \ 1]$, *nous obtenons*

$$\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(n\pi x)\,dx$$

Sachant que

$$\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\delta_n^k$$

où δ_n^k *est le symbole de Kronecker, nous obtenons*

$$\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx = \frac{1}{2}c_k$$

d'où

$$c_k = 2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx, \qquad k \in \mathbb{N}^* \quad \textbf{(1 pt)}$$

et

$$v(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2n\pi)^2 t} \sin(n\pi x) \int_0^1 f(y)\sin(n\pi y)dy.$$

***Exercice 3(5pts)*:**

Soit u une fonction régulière solution de l'équation de la chaleur,

$$(E) \qquad u_t = u_{xx} \ \ dans \ \ \mathbb{R} \times]0, \ +\infty[.$$

1. *Montrons que, $u_\lambda(x, \ t) = u(\lambda x, \lambda^2 t\,)$ est aussi solution de de (E) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

   Calculons $(u_\lambda)_t$ et $(u_\lambda)_{xx}$. Nous avons

   $$(u_\lambda)_t(x,t) = \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t\,) \ \ \mathbf{(0,5\ pt)}$$

   $$(u_\lambda)_x(x,t) = \lambda u_x(\lambda x, \lambda^2 t\,), \qquad (u_\lambda)_{xx}(x,t) = \lambda^2 u_{xx}(\lambda x, \lambda^2 t\,). \ \ \mathbf{(0,5\ pt)}$$

   Ainsi

   $$(u_\lambda)_t(x,t) - (u_\lambda)_{xx}(x,t) = \lambda^2\big(u_t(\lambda x, \lambda^2 t\,) - u_{xx}(\lambda x, \lambda^2 t\,)\big) = 0 \ \ \mathbf{(1\ pt)}$$

   car $u_t(r,s) = u_{xx}(r,s), \forall (r,s) \in \mathbb{R} \times]0, \ +\infty[$.

   La fonction u_λ est donc solution de l'équation de la chaleur pour tout réel λ.

2. *Montrer que $v(x, \ t) = x u_x(x, \ t) + 2t u_t(x, \ t\,)$ résout l'équation (E).*

   - Première méthode: Il suffit de calculer v_t et v_{xx}. On a

   $$v_t(x,t) = x u_{xt}(x,t) + 2u_t(x,t\,) + 2t u_{tt}(x,t\,) \ \ \mathbf{(0,5\ pt)}$$

   $$v_x(x,t) = u_x(x,t) + x u_{xx}(x,t) + 2t u_{tx}(x,t\,)$$

   $$v_{xx}(x,t) = 2u_{xx}(x,t) + x u_{xxx}(x,t) + 2t u_{txx}(x,t\,). \ \ \mathbf{(0,5\ pt)}$$

   D'où

   $$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= x u_{xt} + 2u_t + 2t u_{tt} - 2u_{xx} - x u_{xxx} - 2t u_{txx} \\ &= x(u_{xt} - u_{xxx}) + 2(u_t - u_{xx}) + 2t(u_{tt} - u_{txx}) \ \mathbf{(0,5\ pt)} \end{aligned}$$

   Mais puisque $u_t = u_{xx}$ et u est régulière alors

   $$(u_t)_x = (u_{xx})_x \ \ et \ \ (u_t)_t = (u_{xx})_t$$

   D'où

   $$u_{xt} = u_{xxx} \quad et \quad u_{tt} = u_{txx}$$

   et finalement

   $$v_t - v_{xx} = 0. \ \mathbf{(1,5\ pt)}$$

- *Deuxième méthode: On se sert de la première question.*

  La fonction u_λ est régulière par rapport à x, t et λ, et comme $(u_\lambda)_t = (u_\lambda)_{xx}$

  Alors

  $$\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial \lambda \partial t} = \frac{\partial^3 u_\lambda}{\partial \lambda \partial x^2}. \ \mathbf{(1\ pt)}$$

  D'où

  $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}\right) \ \ \mathbf{(1\ pt)}$$

  Ceci montre que $w_\lambda := \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}$ est solution de l'équation de la chaleur pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

  On a $w_\lambda(x, \ t) = x u_x(\lambda x, \lambda^2 t\,) + 2\lambda t u_t(\lambda x, \lambda^2 t\,)$.

  En remarquant que $w_1(x, \ t) = x u_x(x,t\,) + 2t u_t(x,t\,) = v(x, \ t)$ $\mathbf{(1\ pt)}$

  on conclut que v est solution de l'équation (E).