Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen

Faculté des Sciences, département de Mathématiques

Année Universitaire 2019/2020

Examen de Rattrapage du module « Mesure et Intégration » 17/11/2020 Durée : 01h30mn.

EXERCICE1 : (sur 11.5) EXERCICE2 : (sur 8.5) (au choix, traiter (A) ou (B))

EXERCICE1 : Soient X un ensemble non vide et $\emptyset \neq \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. En hypothèse, on considère les 8 propriétés suivantes :

$$(1)\ \emptyset \in \mathcal{T}, \qquad (2)\ X \in \mathcal{T},$$

$$(3)\ \mathcal{T}\ est\ stable\ par\ passage\ \ complémentaire, \qquad (4)\ \mathcal{T}\ est\ stable\ par\ différence,$$

$$(5)\ \mathcal{T}\ est\ stable\ par\ réunion\ finie, \qquad (6)\ \mathcal{T}\ est\ stable\ par\ intersection\ finie,$$

$$(7)\ \mathcal{T}\ est\ stable\ par\ \sigma - réunion\ , \qquad (8)\ \mathcal{T}\ est\ stable\ par\ \sigma - intersection$$

i- Parmi les 8 définitions $T_1, T_2, \ldots\ldots, T_7, T_8$ suivantes, donner toutes celles qui définissent une tribu de X avec:

$$T_1 \Leftrightarrow \begin{cases}(3)\\(7)\end{cases}, \qquad T_2 \Leftrightarrow \begin{cases}(4)\\(7)\end{cases},$$

$$T_3 \Leftrightarrow \begin{cases}(2)\\(3)\\(8)\end{cases}, \quad T_4 \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\\(4)\\(8)\end{cases}, \quad T_5 \Leftrightarrow \begin{cases}(2)\\(5)\\(7)\end{cases}, \quad T_6 \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\\(8)\end{cases}, \quad T_7 \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\\(2)\\(6)\\(8)\end{cases}, \quad T_8 \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\\(2)\\(5)\\(7)\end{cases}$$

ii- Proposer une définition d'une tribu avec 3 propriétés énoncées dans l'hypothèse et qui n'est pas donnée dans la question1.

EXERCICE2 : (A) On munit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ de la tribu grossière $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

1- Donner un exemple de fonction f étagée et $\mathcal{T}_g$-mesurable telle que $\mathrm{card}(\mathrm{Im}(f)) = 1$.

2- Y'a-t-il une fonction g étagée et $\mathcal{T}_g$-mesurable telle que $\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(g)) = 2$?

3- Donner l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont $\mathcal{T}_g$-mesurables.

On considère les mesures $\mu_g\ et\ \nu_g\ :\ \mathcal{T}_g \to \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$ telles que

$$\mu_g(A) = \begin{cases}0 & si\ A = \emptyset\\ 1 & si\ A \neq \emptyset\end{cases}, \qquad \nu_g(A) = \begin{cases}0 & si\ A = \emptyset\\ +\infty & si\ A \neq \emptyset\end{cases}$$

4- Déterminer $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g, \mu_g)$ et $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g, \nu_g)$.

(B) On suppose que l'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la tribu discrète $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

5- Donner un exemple de fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et qui soit $\mathcal{T}_d$-mesurable.

6- Donner, s'il existe, un exemple de fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et qui ne soit pas $\mathcal{T}_d$-mesurable.

7- Donner l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont $\mathcal{T}_g$-mesurables.

On considère les mesures $\mu_d\ et\ \nu_d\ :\ \mathcal{T}_d \to \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$ telles que

$$\mu_d(A) = \begin{cases}0 & si\ A = \emptyset\\ 1 & si\ A \neq \emptyset\end{cases}, \qquad \nu_d(\emptyset) = \begin{cases}0 & si\ A = \emptyset\\ +\infty & si\ A \neq \emptyset\end{cases}$$

4- Déterminer $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g, \mu_d)$ et $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g, \nu_d)$.

Corrigé de l'examen de Rattrapage du module « Mesure et Intégration » 17/11/2020

SOLUTION DE L'EXERCICE1 :

i1- Les définitions qui définissent une tribu sont :

$$T_3 \Leftrightarrow \begin{cases}(2)\\(3)\\(8)\end{cases}, \quad T_4 \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\\(4)\\(8)\end{cases}, \quad T_6 \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\\(8)\end{cases} \qquad \mathbf{3 \times (1.25)}$$

i2- Les définitions T_1, T_2, T_5, T_7, T_8 ne définissent pas une tribu de X. $\mathbf{5 \times \ (1.25)}$

ii- Comme définition d'une tribu, on peut prendre $T \Leftrightarrow (1)\ et\ (3)\ et\ (8)$. $\mathbf{(1.5)}$

SOLUTION DE L'EXERCICE2 : **PARTIE A**

1- Un exemple de fonction $\boldsymbol{f}$ étagée et $\boldsymbol{\mathcal{T}_g}$-mesurable telle que $\mathbf{Dim(\ Im(}\boldsymbol{f}\mathbf{))} = \mathbf{1}$. On peut prendre $f = 2\chi_{\mathbb{R}}$ c'est-à-dire la fonction constante égale à 2. Elle est étagée car $\mathrm{Im}(f) = \{2\}$ donc $\mathrm{card}(\mathrm{Im}(f)) = 1$ et elle est $\mathcal{T}_g$-mesurable car c'est une combinaison linéaire de la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \in \mathcal{T}_g$. $\mathbf{(1.5\ \boldsymbol{pt})}$

2- Y'a-t-il une fonction $\boldsymbol{g}$ étagée et $\boldsymbol{\mathcal{T}_g}$-mesurable telle que $\mathbf{card(Im(}\boldsymbol{g}\mathbf{))} = \mathbf{2}$? La réponse est non. En effet, si g est étagée et $\mathcal{T}_g$-mesurable elle s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions indicatrices de parties appartenant à $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$,

$$g = a\chi_{\emptyset} + b\chi_{\mathbb{R}} \quad avec\ (\ a\ et\ b\ réels)\ \ et \quad \left(A \in \mathcal{T}_g\ \ et\ \ B \in \mathcal{T}_g\right)$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient $g(x) = a\chi_{\emptyset}(x) + b\chi_{\mathbb{R}}(x) = a \times 0 + b \times 1 = b$.

D'où $\mathrm{Im}(g) = \{b\}$, donc $\mathrm{card}(\mathrm{Im}(g)) = 1 \neq 2$ c'est-à-dire qu'il n y'a pas de fonction g étagée et $\mathcal{T}_g$-mesurable telle que $\mathrm{card}(\mathrm{Im}(g)) = 2$. $\mathbf{(1.5\ \boldsymbol{pt})}$

3- L'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont $\boldsymbol{\mathcal{T}_g}$-mesurables.

Soit $h:\ \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $\mathcal{T}_g$-mesurable. Soit $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $h(x_0) = y_0$ pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$ (i.e. $y_0 \in \mathrm{Im}(h)$).

L'ensemble $\{y_0\}$ est un fermé, donc un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$ et, puisque h est $\mathcal{T}_g$-mesurable, alors $h^{-1}(\{y_0\}) \in \mathcal{T}_g = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

Puisque $h^{-1}(\{y_0\})$ contient x_0 alors $h^{-1}(\{y_0\}) \neq \emptyset$ donc $h^{-1}(\{y_0\}) = \mathbb{R}$, ceci implique que la fonction h est constante et égale à y_0. En effet, si $x \in \mathbb{R}$ alors $x \in h^{-1}(\{y_0\})$ donc $h(x) = y_0 = h(x_0)$ c'est-à-dire h est constante et égale à $y_0 = h(x_0)$.

L'ensemble des toutes les fonctions $\mathcal{T}_g$-mesurables est constitué des fonctions constantes de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ c'est-à-dire, il est égal à

$$\{f:\ \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad f(x) = y_0\ pour\ un\ certain\ y_0 \in \overline{\mathbb{R}}\} =$$

$$\{f = y_0\chi_{\mathbb{R}}\,, \qquad pour\ un\ certain\ y_0 \in \overline{\mathbb{R}}\} \qquad \mathbf{(1.5\ \boldsymbol{pt})}$$

4i- Déterminer $\boldsymbol{\mathcal{L}_1}\left(\mathbb{R}\,, \boldsymbol{\mathcal{T}_g}, \boldsymbol{\mu_g}\ \right)$: L'ensemble $\mathcal{L}_1\left(\mathbb{R}\,, \mathcal{T}_g, \mu_g\ \right)$ est constitué des toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, qui sont $\mathcal{T}_g$-mesurables et telles que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_g \ \ est\ fini$$

Soit $f:\ \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $\mathcal{T}_g$-mesurable c'est à dire $f = y_0\chi_{\mathbb{R}}$ avec $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_g = y_0 \times \mu_g(\mathbb{R}) = y_0 \times (+\infty) = \begin{cases}-\infty & si\ \ y_0 < 0\\ \ 0\ \ si\ \ y_0 = 0 & \\ +\infty & si\ \ y_0 > 0\end{cases}$$

On obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f d\mu_g \ est\ fini\right) \ si\ et\ seulement\ si\ (f = 0 \times \chi_{\mathbb{R}} = 0)$$

Donc L'ensemble $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g, \mu_g)$ contient une seule fonction : la fonction identiquement nulle

$$\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g, \mu_g) = \{f = 0\} \qquad (\mathbf{1.5}\ \boldsymbol{pt})$$

4ii- Déterminer $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g, \nu_g)$: L'ensemble $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g, \nu_g)$ est constitué des toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, qui sont $\mathcal{T}_g$-mesurables et telles que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\nu_g \ est\ fini$$

Soit $f = y_0 \chi_{\mathbb{R}}$, avec ($y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$), une fonction $\mathcal{T}_g$-mesurable, alors

$$\int_{\mathbb{R}} f d\nu_g = y_0 \times \nu_g(\mathbb{R}) = y_0 \times (1) = y_0 = \begin{cases} -\infty & si \ \ y_0 = -\infty \\ y_0 & si \ \ y_0 \in \mathbb{R} \\ +\infty & si \ \ y_0 = +\infty \end{cases}$$

On obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f d\nu_g \ est\ fini\right) \ si\ et\ seulement\ si\ (f = y_0 \times \chi_{\mathbb{R}} = y_0, \qquad avec \ \ y_0 \in \mathbb{R})$$

Donc L'ensemble $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g, \nu_g)$ est constitué de toutes les fonctions constantes à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g, \mu_g) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f = y_0 \times \chi_{\mathbb{R}}\ avec \ \ y_0 \in \mathbb{R}\} = \{f = y_0, \qquad y_0 \in \mathbb{R}\} \qquad (\mathbf{1.5}\ \boldsymbol{pt})$$

PARTIE B

5- Donner un exemple de fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et qui soit $\mathcal{T}_d$-mesurable. On peut prendre, pour F, la fonction identiquement nulle, c'est-à-dire $F = 0 = \chi_\emptyset$; elle est $\mathcal{T}_d$-mesurable car $\emptyset \in \mathcal{T}_d$. $(\mathbf{1.5}\ \boldsymbol{pt})$

6- Donner, s'il existe, un exemple de fonction G de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et qui ne soit pas $\mathcal{T}_d$-mesurable. On sait, d'après le cours, que toutes les fonctions sont mesurables pour la tribu discrète $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ donc il n'existe pas de fonction G de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et qui ne soit pas $\mathcal{T}_d$-mesurable. $(\mathbf{1.5}\ \boldsymbol{pt})$

7- Donner l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui soient $\mathcal{T}_d$-mesurables : L'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont $\mathcal{T}_d$-mesurables est égal à l'ensemble de toutes les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. $(\mathbf{1.5}\ \boldsymbol{pt})$

8i- Déterminer $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d, \mu_d)$: L'application $\mu_d : \mathcal{T}_d \to \overline{\mathbb{R}_+}$ n'est pas une mesure donc L'ensemble $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d, \mu_d)$ n'existe pas car on ne peut pas définir la notion d'intégrale par rapport à μ_d. $(\mathbf{1.5}\ \boldsymbol{pt})$

8ii- Déterminer $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d, \nu_d)$. L'ensemble $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d, \nu_d)$ est constitué des toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}} |f| d\nu_d \ est\ fini$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on traite deux cas (a) et (b)

(a) Supposons $f = 0 = \chi_\emptyset$. On obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |f| d\nu_d = \int_{\mathbb{R}} \chi_\emptyset d\nu_d = \nu_d(\emptyset) = 0$$

(b) Supposons $f \neq 0$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$, on a

$$|f| \geq |f(x_0)| \chi_{\{x_0\}}$$

L'intégrale par rapport à une mesure est croissante donc $g = |f(x_0)|\chi_{\{x_0\}}$ est une fonction étagée et $\mathcal{T}_d$-mesurables donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f| d\nu_d \geq \int_{\mathbb{R}} g d\nu_d = \int_{\mathbb{R}} |f(x_0)| \chi_{\{x_0\}} d\nu_d = |f(x_0)| \times \nu_d(\{x_0\}) = |f(x_0)| \times (+\infty) = +\infty$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f| d\nu_d = +\infty$$

On conclut alors que $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d, \nu_d)$ contient seulement la fonction identiquement nulle c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d, \nu_d) = \{f = 0\} \qquad \mathbf{(1.5\ \boldsymbol{pt})}$$