Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3e Année Licence - S5 — Novembre 2020

Espaces Vectoriels Normés — Examen de Rattrapage — 1H30

***Exercice 1(6pts)*:**

*Soit $H$ un espace de Hilbert et $F$ un sous-espace de $H$.*

*1. Montrer que* $\left(\overline{F}\right)^{\perp} = F^{\perp}$.

*2. En déduire que:* $\overline{F} = H \Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}$.

***Exercice 2(6pts)*:**

*Soit $M_2$ l'espace des matrices carrées d'ordre 2. Pour une matrice carrée $P$ d'ordre $n$ on définit sa trace par, $tr(P) = p_{11} + \cdots + p_{nn}$ où les $p_{ii}$ sont les éléments diagonaux de la matrice $P$.*

*Soit $A, B \in M_2$, on pose $F(A,B) = tr\left({}^{t}A \cdot B\right)$.*

*1. Montrer que l'application $F$ définit un produit scalaire sur $M_2$.*

*Ind.: Poser $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le 2}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{1\le i,j\le 2}$ et calculer explicitement $F(A,B)$.*

*2. Quel est l'espace orthogonal à la matrice* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

***Exercice 3(8pts)*:**

*Soit* $H = L^2(]-1,+1[,\mathbb{R}) = \left\{f : ]-1,+1[ \longrightarrow \mathbb{R};\ \int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx < \infty\right\}$ *l'espace de Hilbert pour le produit scalaire usuel*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

*On définit l'ensemble $F$ par*

$$F = \left\{f \in H;\ \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\right\}.$$

*1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H$.*

*2. Déterminer $F^{\perp}$ le sous-espace orthogonal à $F$.*

*3. Pour $h \in H$, déterminer $P_F(h)$ projection orthogonale de $h$ sur $F$.*

*En déduire la distance de la fonction $h : x \longmapsto x + b$ à $F$, $b$ étant un paramètre réel.*

*Bon Courage*

**Corrigé**

***Exercice 1(6pts)*:**

*$F$ étant un sous-espace de l'espace de Hilbert $H$.*

*1. Montrons que $\left(\overline{F}\right)^{\perp} = F^{\perp}$.*

*Nous avons déjà $\left(\overline{F}\right)^{\perp} \subset F^{\perp}$ car $F \subset \overline{F}$.* $(\mathbf{1pt})$

*Passons à l'inclusion inverse $F^{\perp} \subset \left(\overline{F}\right)^{\perp}$:* $(\mathbf{3pts})$

*Soit $x \in F^{\perp}$, vérifions que $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in \overline{F}$.*

*Comme $y \in \overline{F}$ alors il existe une suite $(y_n) \subset F$ convergeant vers $y$. On a*

$\langle x, y\rangle = \langle x, y - y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle = \langle x, y - y_n\rangle$ *car* $\langle x, y_n\rangle = 0$ *puisque* $x \in F^{\perp}$ *et* $y_n \in F$.

*En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons*

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle x, y - y_n\rangle| \leq \|x\|\|y - y_n\| \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

*car $(y_n)$ converge vers $y$.*

*D'où $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in \overline{F}$, d'où $x \in \left(\overline{F}\right)^{\perp}$.*

*Nous venons de montrer que; $\forall x \in H,\ x \in F^{\perp} \Longrightarrow x \in \left(\overline{F}\right)^{\perp}$.*

*Donc $F^{\perp} \subset \left(\overline{F}\right)^{\perp}$ et par suite $\left(\overline{F}\right)^{\perp} = F^{\perp}$.*

*2. Montrons que: $\overline{F} = H \Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}$.* $(\mathbf{2pts})$

*Nous avons, puisque $\overline{F}$ est un sous-espace fermé de $H$, $H = \overline{F} \oplus \left(\overline{F}\right)^{\perp}$.*

*D'après la première question, nous écrivons $H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$.*

*Ainsi, il en découle directement que $\overline{F} = H$ si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.*

***Exercice 2(6pts)*:**

*Soit $M_2$ l'espace des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit $A, B \in M_2$, on pose*

$$F(A, B) = tr\left({}^{t}A \cdot B\right).$$

*1. Montrons que l'application $F$ définit un produit scalaire sur $M_2$.*

*Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ deux matrices de $M_2$, alors*

$$F(A, B) = tr\left({}^{t}A \cdot B\right) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} \quad (\mathbf{1pt})$$

*a. Il est évident que $F(B, A) = F(A, B)$. Donc $F$ est symétrique.* $(\mathbf{1pt})$

*b. - Vérifions que pour tous $A, B, C \in M_2$ ; $F(A + C, B) = F(A, B) + F(C, B)$.* $(\mathbf{0,5pt})$

*Nous avons en utilisant l'expression de F:*

$$F(A+C,B)=(a_{11}+c_{11})b_{11}+(a_{21}+c_{21})b_{21}+(a_{12}+c_{12})b_{12}+(a_{22}+c_{22})b_{22}$$
$$=a_{11}b_{11}+c_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+c_{21}b_{21}+a_{12}b_{12}+c_{12}b_{12}+a_{22}b_{22}+c_{22}b_{22}$$
$$=(a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22})+(c_{11}b_{11}+c_{21}b_{21}+c_{12}b_{12}+c_{22}b_{22})$$

*D'où* $F(A+C,B)=F(A,B)+F(C,B)$.

- *Vérifions que pour tous* $\alpha\in\mathbb{R}$, $A,B\in M_2$; $F(\alpha A,B)=\alpha F(A,B)$. **(0,5pt)**

*Nous avons* $F(\alpha A,B)=\alpha a_{11}b_{11}+\alpha a_{21}b_{21}+\alpha a_{12}b_{12}+\alpha a_{22}b_{22}$

$$=\alpha(a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22})=\alpha F(A,B).$$

*Des points a. et b. on conclut que F est bilinéaire.*

*c. Vérifions que F est définie positive.* **(1pt)**

*Soit* $A\in M_2$, *alors* $F(A,A)=a_{11}^2+\ a_{21}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\geq 0$.

*De plus,*

$$F(A,A)=0\Leftrightarrow a_{11}^2+\ a_{21}^2+a_{12}^2+a_{22}^2=0\Leftrightarrow a_{11}=a_{11}=a_{11}=a_{11}=0\Leftrightarrow A=0_{M_2}.$$

*Conclusion.* $F:M_2\times M_2\longrightarrow\mathbb{R}$, $F(A,B)=tr\left({}^tA\cdot B\right)$ *est un produit scalaire sur* $M_2$.

*2. Déterminons l'espace orthogonal à la matrice* $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

*Soit* $C=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2$ , *alors C est orthogonale à I si et seulement si* $F(C,I)=0$.

$$F(C,I)=0\Leftrightarrow tr\left({}^tC\cdot I\right)=0\Leftrightarrow a+d=0\Leftrightarrow d=-a.$$

*Par suite l'espace orthogonal à I est constitué des matrices de* $M_2$ *à trace nulle,*

*i.e. les matrices de la forme* $C=\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$. **(2pts)**

*On a*

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&-a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\c&0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

*En conclusion.*

$$\{I\}^{\perp}=\mathrm{vect}\{E_0,E_1,E_2\}$$

*où*

$$E_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\qquad E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad E_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

***Exercice 3(8pts)*:**

*Soient* $H = L^2(]-1,+1[,\mathbb{R})$ *l'espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

*et F l'ensemble défini par*

$$F = \left\{f \in H;\ \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\right\}.$$

*1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel fermé de H.*

*Soit l'application* $\varphi: H \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\varphi(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

*L'application* $\varphi$ *est évidemment linéaire et* $F = \ker\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$. $(\mathbf{2\times 1}\boldsymbol{pt})$

*Si* $\varphi$ *est continue alors* $F$ *sera un sous-espace fermé de* $H$.

*Vérifions que* $\varphi$ *est continue.*

*Pour tout* $f \in H$, *nous avons, en notant par* $\mathbf{1}$ *la fonction p. p. égale à 1 dans* $]-1,1[$

$$|\varphi(f)| = \left|\int_{-1}^{1} f(x)dx\right| = |\langle \mathbf{1}, f\rangle| \leq \|\mathbf{1}\|\|f\| = \sqrt{2}\,\|f\|\ (\mathbf{1}\boldsymbol{pt})$$

*et la continuité de* $\varphi$ *en découle. On conclut que F est un sous-espace fermé de H.*

*2. Déterminons* $F^{\perp}$ *le sous-espace orthogonal à* $F$. $(\mathbf{1}\boldsymbol{pt})$

*F étant le noyau d'une forme linéaire continue, c'est donc un hyperplan fermé et par suite son orthogonal* $F^{\perp}$ *est de dimension 1. Nous avons*

$$\forall f \in F, \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$$

*d'où,* $\forall f \in F, \langle \mathbf{1}, f\rangle = 0$, *ceci montre que* $\mathbf{1} \in F^{\perp}$, *ainsi*

$$F^{\perp} = vect\{\mathbf{1}\} = \{f \in H; f = \lambda\mathbf{1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\} = \{f \in H; f\ constante\ p.p\ dans\ ]-1,1[\ \}.$$

*3. Soit* $h \in H$, *déterminons* $P_F(h)$ *projection orthogonale de h sur F.*

*Posons* $g = P_F(h)$, *alors*

$$\begin{cases} h - g \in F^{\perp} \\ \quad g \in F \end{cases}$$

*D'où, il existe une constante réelle* $\lambda$ *telle que*

$$\begin{cases} h(x) - g(x) = \lambda,\ \ p.p.\ x \in\ ]-1,1[ \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0. \end{cases}$$

*Intégrons sur* $]-1,1[$ *les deux membres de la première égalité, nous trouvons*

$$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2\lambda \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} h(x)dx$$

*et par suite en remplaçant dans la première égalité, nous déduisons que*

$$g = h - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} h(x)dx = P_F(h).\ (\mathbf{2pts})$$

*Calculons la distance de la fonction* $h: x \longmapsto x + b$ *à* $F$, $b$ *étant un paramètre réel.*

*On a*

$$d^2(h,F) = \|h - P_F(h)\|^2 = \int_{-1}^{1} |h(x) - P_F(h)(x)|^2 dx$$

$$P_F(h)(x) = h(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} h(x)dx = x + b - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+b)dx = x$$

$$d^2(h,F) = \int_{-1}^{1} |h(x) - P_F(h)(x)|^2 dx = \int_{-1}^{1} b^2 dx = 2b^2\ .$$

*D'où finalement,* $d(h,F) = \sqrt{2}\,|b|.$ $(\mathbf{2pts})$

*Remarque: Nous avons* $h = I + b\mathbf{1} \in H = F \oplus F^{\perp}$. *Comme* $I \in F$ *et* $b\mathbf{1} \in F^{\perp}$ *alors* $P_F(h) = I$ *d'où* $h - P_F(h) = b\mathbf{1}$. *Ici* $I(x) = x\ \ p.p.\, x \in\, ]-1,1[$.