Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3^{e} Année Licence - S5 — 1 Février 2020

Espaces Normés et Analyse Hilbertienne — Examen Final — 1H45

Exercice 1: *On considère l'espace de Hilbert* $E=\left\{f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R};\ \int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx<\infty\right\}$ *de produit scalaire* $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\,g(x)dx.$ *On pose*

$$m:=\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\int_{-1}^{1}|e^x-(ax+b)|^2dx.$$

1. *Montrer que m existe.*
2. *Calculer m.*

Exercice 2: *Soit E un espace de Hilbert de dimension infinie sur* $\mathbb{R}$, *et soit* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une base hilbertienne de E.*
Montrer que E est isomorphe (et isométrique) à l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ *où*

$$\ell^2(\mathbb{N}^*)=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}:\ u_n\in\mathbb{R}\ et\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n^2<\infty\right\}.$$

Exercice 3: *Soit*

$$E=\left\{f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{C};\ \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx<\infty\right\}.$$

E est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\overline{g(x)}dx.$$

1. *Soient* $F=\{f\in E; f(0)=0\}$ *et* $q(x)=\cos x$.
   a. *Vérifier que* $q\in E\backslash F$.
   b. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de E.*
   c. *En déduire qu'il existe une unique fonction* $g\in F$ *telle que*
   $$\int_{-\pi}^{\pi}(g(x)-\cos x)\,\overline{f(x)}\,dx=0,\quad\forall f\in F.$$
2. *On pose pour tous* $n\in\mathbb{Z}$ *et* $x\in[-\pi,\pi]$; $v_n(x)=e^{inx}$.
   a. *Montrer que la famille* $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est orthonormée dans E.*
   On admet que $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base hilbertienne de E, et soit* $f(x)=x$.
   b. *Calculer les coefficients de Fourier de f.*
   c. *En déduire que*
   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$
   d. *Calculer la valeur de*
   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Barème: *Exercice 1: 7pts* *Exercice 2: 5pts* *Exercice 3: 8pts.*

Bon Courage

Corrigé

Exercice 1:

$$E = \left\{ f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R};\ \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}, \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x) dx.$$

On pose

$$m := \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |e^x - (ax+b)|^2 dx.$$

1. *Montrons que m existe: m peut-être écrit comme suit,*

$$m = \inf_{f \in F} \|g - f\|^2 = \left(\inf_{f \in F} \|g - f\| \right)^2 = d^2(g, F).$$

où F est l'espace des polynômes de degré ≤ 1 *et* $g(x) = e^x$.

(1pt) *F est un s-ev fermé* $(\dim F = 2)$ *de l'espace de Hilbert E, alors la projection de g sur F existe et est unique et nous avons*

$$m = \|g - P_F(g)\|^2.$$

2. *Calculons m :*

- *Déterminons d'abord* $h := P_F(g)$. *h est caractérisée par:*

$$\textbf{(1pt x 2)} \begin{cases} h \in F \\ g - h \in F^{\perp} \end{cases} \quad (S)$$

$\{1, X\}$ *est une base de F, d'où*

$$(S) \Longrightarrow \begin{cases} h = \alpha X + \beta \\ \langle g - \alpha X - \beta, 1 \rangle = 0 \\ \langle g - \alpha X - \beta, X \rangle = 0. \end{cases}$$

(0, 5pt x 2)

$$\begin{cases} \langle g - \alpha X - \beta, 1 \rangle = 0 \\ \langle g - \alpha X - \beta, X \rangle = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \int_{-1}^{1} (e^x - \alpha x - \beta) dx = 0 \\ \int_{-1}^{1} (e^x - \alpha x - \beta) x dx = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e - e^{-1} - 2\beta = 0 \\ 2e^{-1} - \frac{2}{3}\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \beta = \operatorname{sh} 1 \\ \alpha = 3e^{-1}. \end{cases} \quad \textbf{(0, 5pt x 2)}$$

Ainsi $h(x) = 3e^{-1}x + \operatorname{sh} 1$.

- *Calculons m*

$$m = \|g - h\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(e^x - (3e^{-1}x + \operatorname{sh} 1) \right)^2 dx.$$

On a

$$\int_{-1}^{1} \left(e^x - (3e^{-1}x + \operatorname{sh} 1) \right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \left(e^{2x} - 2(3e^{-1}x + \operatorname{sh} 1)e^x + (3e^{-1}x + \operatorname{sh} 1)^2 \right) dx.$$

Après calcul, on trouve $m = \operatorname{sh} 2 - 6e^{-2} - 2\operatorname{sh}^2 1 = 1 - 7e^{-2}$. **(2 pts)**

Exercice 2: *Soit E un espace de Hilbert sur* $\mathbb{R}$ *de base hilbertienne* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Montrons que E est isomorphe (et isométrique) à l'espace de Hilbert

$$\ell^2(\mathbb{N}^*) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}:\ u_n \in \mathbb{R}\ \text{et}\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < \infty\right\}.$$

On sait que

$$\forall x \in E: x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$$

et l'identité de Parseval donne

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2,$$

comme $\|x\|^2 < \infty$, *considérons alors l'application* $f: E \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}^*)$ *définie par*

$$f(x) = (\langle x, e_n\rangle)_{n\geq 1}.$$

1. *f est linéaire :* **(1pt)**

   $$\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R};\ f(x+\alpha y) = (\langle x+\alpha y, e_n\rangle)_{n\geq 1}$$

   La bilinéarité du produit scalaire et les opérations sur les suites donnent

   $$f(x+\alpha y) = (\langle x, e_n\rangle)_{n\geq 1} + \alpha(\langle y, e_n\rangle)_{n\geq 1} = f(x) + \alpha f(y),$$

2. *f est injective : Soit* $x \in \operatorname{Ker} f$,

   $$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} f &\Longrightarrow f(x) = 0_{\ell^2(\mathbb{N}^*)} \\ &\Longrightarrow (\langle x, e_n\rangle)_{n\geq 1} = 0_{\ell^2(\mathbb{N}^*)} \\ &\Longrightarrow \langle x, e_n\rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

   or $x = \sum_{n\geq 1}\langle x, e_n\rangle e_n$ *d'où* $x = 0_E$.
   Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ *et par suite f est injective.* **(1,5pt)**

3. *f est sujective: Soit* $(u_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$. *Montrons qu'il existe* $x \in E$ *tel que*

   $$f(x) = (u_n)_{n\geq 1}.$$

   Posons

   $$x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n \qquad (1)$$

   Alors pour tout $j \in \mathbb{N}^*$

   $$\langle x, e_j\rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n, e_j\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \langle e_n, e_j\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\, \delta_n^j = u_j$$

   car la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est orthonormée* $\left(\delta_n^j \text{ est le symbole de Kronecker}\right)$.
   D'où $(u_n)_{n\geq 1} = (\langle x, e_n\rangle)_{n\geq 1} = f(x)$ *et x est défini par* (1). *f est donc surjective.* **(1,5pt)**

4. *On pour tout* $x \in E$: $\|f(x)\|^2 = \|(\langle x, e_n\rangle)_{n\geq 1}\|^2 = \sum_{n\geq 1}|\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2$
   La deuxième égalité c'est la définition de la norme de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$, *la troisième c'est l'identité de Parseval.*
   En conclusion f est un isomorphisme isométrique et E est isométriquement isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N}^*)$. **(1pt)**

Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3e Année Licence - S5 — 1 Février 2020

Espaces Normés et Analyse Hilbertienne — Examen Final — 1H45

***Exercice 3**: Soit l'espace de Hilbert*

$$E=\left\{f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{C};\ \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx<\infty\right\},\qquad \langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\overline{g(x)}dx.$$

1. *Soient* $F=\{f\in E; f(0)=0\}$ *et* $q(x)=\cos x$.
   a. *Vérifions que* $q\in E\backslash F$. *On a*
   $$\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x)^2dx\le\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi$$
   donc $q\in E$, *et puisque* $q(0)=\cos 0=1\neq 0$ *alors* $q\notin F$. *Ainsi* $q\in E\backslash F$. **(1pt)**

   b. *Montrons que F est un sous-espace vectoriel fermé de E.* **(1pt)**
   1e Méthode: - On montre que: $\forall f,g\in F,\forall\alpha\in\mathbb{C}: f+\alpha g\in F$.
   (évidemment F n'est pas vide !)
   - *On montre que si* (f_n) *est une suite de F convergeant vers* $f\in E$, *alors* $f\in F$.

   2e Méthode: On considère l'application $\varphi: E\longrightarrow\mathbb{C}, f\longmapsto\varphi(f)=f(0)$.
   On montre que φ *est linéaire, c'est donc une forme linéaire.*
   On montre que φ *est continue*
   On voit que $F=\operatorname{Ker}\varphi$, *et F est alors un sous-espace vectoriel fermé de E.*

   c. *Montrons qu'il existe une unique fonction* $g\in F$ *telle que*
   $$\int_{-\pi}^{\pi}(g(x)-\cos x)\,\overline{f(x)}\,dx=0,\quad\forall f\in F.\quad(*)$$
   On a $\quad(*)\Longleftrightarrow 2\pi\langle g-q,f\rangle=0,\forall f\in F$
   Ce qui revient à écrire : $\langle q-g,f\rangle=0,\forall f\in F$.
   Et c'est la caractérisation de la projection orthogonale de q sur F !
   Or F est un sous-espace vectoriel complet, donc la projection de q sur F existe et est unique, et on a $g=P_F(q)$. **(1pt)**

2. *On pose pour tous* $n\in\mathbb{Z}$ *et* $x\in[-\pi,\pi]$; $\quad v_n(x)=e^{inx}$.
   a. *Montrons que la famille* $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est orthonormée dans E.*
   On a pour tout $n\in\mathbb{Z}$
   $$\langle v_n,v_n\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}\,e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx=1,\ \textbf{(0,5pt)}$$
   et pour tous entiers n et m, $n\neq m$,
   $$\langle v_n,v_m\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}\,e^{-imx}dx=\frac{1}{2(n-m)\pi}\left[e^{i(n-m)x}\right]_{-\pi}^{\pi}$$
   $$=\frac{(-1)^{n-m}-(-1)^{n-m}}{2(n-m)\pi}=0.\ \textbf{(0,5pt)}$$
   On admet que $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base hilbertienne de E, et soit* $f(x)=x$.
   b. *Calculons les coefficients de Fourier de f.*
   $$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=0\ \ \textbf{(0,5pt)}$$
   et pour $n\in\mathbb{Z}^*$, *par une intégration par parties on trouve*
   $$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,e^{-inx}dx=i\frac{(-1)^n}{n}.\ \ \textbf{(1pt)}$$

c. *Montrons que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

D'après l'identité de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}.$$

Et

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{6\pi}[x^3]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

d'où

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \mathbf{(1,5pt)}$$

d. *Valeur de*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^n}{n}.$$

On a

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, v_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} i\frac{(-1)^n}{n} e^{inx}.$$

Pour $x = 0$, on trouve

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^n}{n} = 0. \quad \mathbf{(1pt)}$$