Correction du Contrôle Continu Mesure et Intégration 2019-2020

Contrôle continu. Mardi 07/01/2020 Durée 02h

EXERCICE1 : Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $g : X \to \mathbb{R}$ une fonction $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Pour tout $a \geq 0$, on pose $A_0 = g^{-1}(]-a, a[)$, $A_1 = g^{-1}([a, +\infty[)$ et $A_2 = g^{-1}(]-\infty, -a])$ et on définit la fonction $g_a : X \to \mathbb{R}$ par

$$x \in X \to g_a(x) = \begin{cases} a & si \quad g(x) \geq a \\ g(x) & si \quad |g(x)| < a \\ -a & si \; g(x) \leq -a \end{cases}$$

i- Montrer que les ensembles A_0, A_1, A_2 appartiennent à $\mathcal{T}$. **1.5pt**

ii- Soit la fonction $G_a = g\chi_{A_0} + a\chi_{A_1} - a\chi_{A_2}$. Montrer que l'on a $g_a = G_a$. **1.5pt**

iii- En déduire que, pour tout $a \geq 0$, la fonction g_a est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. **1pt**

iv- Montrer que, pour tout $b \in]-a, a[$, on a $(g_a)^{-1}(]-\infty, b[) = g^{-1}([-a, b[)$ **1pt**

v- Déterminer $(g_a)^{-1}(]-\infty, b[)$, pour $b \leq -a$ puis pour $b \geq a$. **1pt**

vi- En déduire que g_a est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable (utiliser la définition). **1pt**

EXERCICE2 : 1) Rappeler la construction de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ (espace métrique) en commençant par définir la distance qui engendre sa structure d'espace métrique puis d'espace mesurable. **1pt**

2) On suppose que les structures topologique et borélienne de l'espace métrique $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ sont connues : $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ étant sa topologie et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sa tribu borélienne ; donner la caractérisation d'un ouvert V de $\overline{\mathbb{R}}$ puis d'un borélien A de $\overline{\mathbb{R}}$. **1pt**

3) Déterminer, dans $\overline{\mathbb{R}}$, la boule ouverte $B\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ et la boule fermée $\bar{B}\left(+\infty, \frac{\pi}{2}\right)$. Le singleton $\{+\infty\}$ est-il fermé dans $\overline{\mathbb{R}}$? **3pt**

EXERCICE3 : On muni $\mathbb{R}^2$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Soient $A =]-1,0] \times [-1,0]$, $B = [0,1] \times [0,1]$ des parties de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f = 2\chi_A - \chi_B$

i- Montrer que la fonction f est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et étagée. **2pt**

ii- Déterminer $A \cap B$ puis en déduire que $card(\mathrm{Im}\, f) = 4$ et $card(\mathrm{Im}|f|) = 3$. **3pt**

iii- Donner l'écriture canonique de chacune des fonctions f et $|f|$. **3pt**

1- En général, si X est un ensemble quelconque et $f: X \to \mathbb{R}$ une fonction étagée, montrer que $card(\mathrm{Im}|f|) \leq card(\mathrm{Im}\, f)$. **2pt**

2- Si $\mathrm{Im}\, f = \{y_1, y_2, , \ldots . y_n\}$, donner une condition suffisante sur les éléments de $\mathrm{Im}\, f$ pour avoir l'inégalité stricte. **2pt**

Supposons que X est muni d'une tribu $\mathcal{T}$, Montrer que si $f : X \to \mathbb{R}$ est étagée et $\mathcal{T}$-mesurable alors $|f|$ l'est aussi. **2pt**

La réciproque est-elle vraie ? Considérer $f = \chi_A - \chi_{\bar{A}}$ où $A \notin \mathcal{T}$. **2pt**

SOLUTION DE L'EXERCICE N°1

i) les ensembles A_0, A_1, A_2 appartiennent à $\mathcal{T}$.

Les ensembles $A_0 = g^{-1}(]-a,a[)$, $A_1 = g^{-1}([a,+\infty[)$ et $A_2 = g^{-1}(]-\infty,-a])$ sont les images réciproques de boréliens par la fonction mesurable g donc appartiennent à $\mathcal{T}$: $[a,+\infty[$ et $]-\infty,-a]$ sont des boréliens car fermés et $]-a,a[$ est un borélien car ouvert.

ii) Les fonctions g_a et $G_a = g\chi_{A_0} + a\chi_{A_1} - a\chi_{A_2}$ sont égales.

Les fonctions g_a et G_a ont le même ensemble de départ X et le même ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. En plus, pour tout $x \in X$, on a :

$$g_a(x) = \begin{cases} a \ si \ \ g(x) \geq a \\ g(x) \ si \ \ |g(x)| < a \\ -a \ si \ g(x) \leq -a \end{cases} = \begin{cases} a \ si \ \ g(x) \in [a,+\infty[\\ g(x) \ si \ g(x) \in]-a,a[\\ -a \ \ si \ g(x) \in]-\infty,-a] \end{cases} = \begin{cases} a \ si \ \ x \in g^{-1}([a,+\infty[) \\ g(x) \ si \ x \in g^{-1}(]-a,a[) \\ -a \ si \ x \in g^{-1}(]-\infty,-a]) \end{cases} = \begin{cases} a \ \ si \ \ x \in A_1 \\ g(x) \ \ si \ x \in A_0 \\ -a \ \ si \ x \in A_2 \end{cases}$$

$$=$$

$$g(x)\chi_{A_0}(x) + a\chi_{A_1}(x) - a\chi_{A_2}(x) = \left(g\chi_{A_0} + a\chi_{A_1} - a\chi_{A_2}\right)(x) = G_a(x)$$

D'où $g_a = G_a$.

iii) Pour tout $a \geq 0$, la fonction g_a est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

En effet, la fonction $h = a\chi_{A_1} - a\chi_{A_2}$ est étagée et mesurable car les ensembles A_1, $A_2 \in \mathcal{T}$ et la fonction $k = g\chi_{A_0}$ est mesurable car c'est le produit de deux fonctions mesurables g et χ_{A_0} donc $g_a = k + h$ est mesurable car c'est la somme de deux fonctions mesurables.

iv) Déterminer $(g_a)^{-1}(]-\infty,b[)$, pour $b \leq -a$ et et $b \geq a$ puis montrer que $(g_a)^{-1}(]-\infty,b[) = g^{-1}([-a,b[)$, pour tout $b \in]-a,a[$.

Pour $b \leq -a$, remarquons que $g_a(x) \in [-a,a]$ donc, on obtient :

$$(g_a)^{-1}(]-\infty,b[) = \emptyset$$

Car, si $x \in (g_a)^{-1}(]-\infty,b[)$ alors $g_a(x) < b$ donc $g_a(x) < -$a. C'est en contradiction avec $g_a(x) \in [-a,a]$ donc $(g_a)^{-1}(]-\infty,b[) = \emptyset$.

Pour $b > a$, on a :

$$(g_a)^{-1}(]-\infty,b[) = X$$

Pour $b = a$, on a :

$$(g_a)^{-1}(]-\infty,a[) = X - A_1$$

Pour $b \in]-a,a[$, pour tout $x \in X$, on a :

$$x \in (g_a)^{-1}(]-\infty,b[)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in (g_a)^{-1}(]-\infty,-a[\cup [-a,b[)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in \left((g_a)^{-1}(]-\infty,-a[) \cup (g_a)^{-1}([-a,b[)\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in \emptyset \cup (g_a)^{-1}([-a,b[)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in (g_a)^{-1}(\{-a\} \cup]-a,b[)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in (g_a)^{-1}(\{-a\}) \cup (g_a)^{-1}(]-a,b[)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(g_a(x) = a) \; ou \; \left(x \in (g_a)^{-1}(]-a,b[)\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x \in A_2) \quad ou \quad g(x) \in (]-a,b[)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x \in A_2) \quad ou \quad \left(x \in g^{-1}(]-a,b[)\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in A_2 \cup g^{-1}(]-a,b[)$$

iv) La fonction g_a est $\left(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$-mesurable (utiliser la définition).

On a montré dans la question précédente, que

$$(g_a)^{-1}(]-\infty,b[) = \begin{cases} \emptyset & si \quad b \leq -a \\ A_2 \cup g^{-1}(]-a,b[) & si \quad -a < b < a \\ X - A_1 & si \quad b = a \\ X & si \quad b > a \end{cases}$$

On a

$$\emptyset \in \mathcal{T}, \qquad X \in \mathcal{T}, \qquad X - A_1 \in \mathcal{T} \; (\text{car } A_1 \in \mathcal{T}) \; \text{ et } \; A_2 \cup g^{-1}(]-a,b[) \in \mathcal{T}$$

$$(car \; A_2 \in \mathcal{T} \; \text{ et } g \; est \; mesurable \; donc \; g^{-1}(]-a,b[) \in \mathcal{T})$$

Donc, en utilisant la définition, g_a est $\left(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$-mesurable, puisque

$$\forall b \in \mathbb{R}, \qquad (g_a)^{-1}(]-\infty,b[) \in \mathcal{T}$$

<u>SOLUTION DE L'EXERCICE N°1</u>

1) Rappeler la construction de la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$.

La distance qui engendre la structure d'espace métrique de $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$ est définie par

$$\delta(x,y) = |\arctan x - \arctan y| \qquad avec \;\; \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \quad et \quad \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

La tribu borélienne $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est la tribu engendrée par la topologie $\mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}})$ de l'espace métrique $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire la famille des ouverts relativement à la métrique δ de $\overline{\mathbb{R}}$). On obtient l'espace mesurable $\left(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$.

2) La caractérisation des ouverts et des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$. Soit $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$V \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{R}}) \;\Leftrightarrow\; \left(V \in \mathcal{O}(\mathbb{R})\right) ou \left(V = U \cup I \;\text{ où } U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}) \;\; et \; I \in \left\{\{-\infty\},\{+\infty\},\{-\infty,+\infty\}\right\}\right)$$

$$A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \;\Leftrightarrow\; \left(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right) ou \left(A = B \cup I \;\text{ où } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \;\; et \; I \in \left\{\{-\infty\},\{+\infty\},\{-\infty,+\infty\}\right\}\right)$$

3) La boule ouverte $B(0,\pi/2)$, dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$x \in B\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \delta(x,0) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow |\arctan x - \arctan 0| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Donc $B(0,\pi/2) = \mathbb{R}$

4) La boule fermée $\bar{B}(+\infty, \pi/2)$, dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$x \in \bar{B}\left(+\infty, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \delta(x, +\infty) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \left|\arctan x - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Donc $\bar{B}(0, \pi/2) = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$

5) Le singleton $\{+\infty\}$ est-il fermé dans $\overline{\mathbb{R}}$? Oui car, dans un espace métrique, tous les singletons sont des fermés.

Une autre méthode : On peut aussi remarquer que $\{+\infty\} = \bar{B}(0, \pi/2) - B(0, \pi/2)$ c'est-à-dire $\{+\infty\} = \bar{B}(0, \pi/2) \cap \overline{B(0, \pi/2)}$ donc $\{+\infty\}$ est fermé car il est l'intersection de deux fermés à savoir $\bar{B}(0, \pi/2)$ (boule fermée) et $\overline{B(0, \pi/2)}$ (complémentaire d'une boule ouverte)

<u>SOLUTION DE L'EXERCICE N°3</u>

i) La fonction $f = 2\chi_A - \chi_B$ est étagée car c'est une combinaison linéaire de 2 fonctions indicatrices à savoir χ_A et χ_B.

ii) La fonction f est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable car les ensembles A et B sont des rectangles donc des boréliens de $\mathbb{R}^2$.

iii) Déterminons $A \cap B$ où $A =]-1, 0] \times [-1, 0]$ et $B = [0, 1] \times [0, 1]$: Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$u = (x, y) \in A \cap B$$

$$\Leftrightarrow$$

$$u \in A \; et \; u \in B$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x \in]-1,0] \; et \; y \in [-1,0]) \; et \; (x \in [0, 1] \; et \; y \in [0, 1])$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x \in]-1,0] \; et \; x \in [0, 1]) \; et \; (y \in [-1,0] \; et \; y \in [0, 1])$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x \in]-1,0] \; \cap [0, 1]) \; et \; (y \in [-1,0] \; \cap [0, 1])$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x \in \{0\}) \; et \; (y \in \{0\})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$u = (x, y) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$u = (x, y) \in \{(0,0)\}$$

Donc $A \cap B = \{(0,0)\}$

iv) Montrons que $card(\mathrm{Im}\, f) = 4$. Pour déterminer l'ensemble $\mathrm{Im}\, f$, remarquons que les ensembles A et B définissent une partition de $\mathbb{R}^2$ constituée de 4 ensembles $\{A - B,\ B - A,\ A \cap B, \overline{A \cup B}\}$. Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on obtient,

$$f(u) = f(x, y) = 2\chi_A(u) - \chi_B(u) = \begin{cases} 2 - 0 = 2 & si\; u = (x, y) \in A - B \\ 0 - 1 = -1 & si\; u = (x, y) \in B - A \\ 2 - 1 = 1 & si\; u = (x, y) \in A \cap B \\ 0 - 0 = 0 & si\; u = (x, y) \in \overline{A \cup B} \end{cases}$$

On trouve $\mathrm{Im}\, f = \{-1,\ 0, 1,\ 2\}$ donc $card(\mathrm{Im}\, f) = 4$.

iv) Montrons que $card(\mathrm{Im}|f|) = 3$. Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$|f(\mathrm{u})| = |2\chi_A(u) - \chi_B(u)| = \begin{cases} |2| = 2 \quad si\ u = (x,y) \in A - B \\ |-1| = 1 \ \ si\ u = (x,y) \in B - A \\ |1| = 1 \quad si\ u = (x,y) \in A \cap B \\ |0| = 0 \quad si\ u = (x,y) \in \overline{A \cup B} \end{cases}$$

On trouve $\mathrm{Im}|f| = \{0, 1, 2\}$ donc $card(\mathrm{Im}|f|) = 3$.

v) L'écriture canonique de $\boldsymbol{f}$: on a $f^{-1}(\{2\}) = A - B$, $f^{-1}(\{-1\}) = B - A$, $f^{-1}(\{1\}) = A \cap B$, $f^{-1}(\{0\}) = \overline{A \cup B}$, d'où

$$f = 2\chi_{A-B} - \chi_{B-A} + \chi_{A\cap B} + 0\chi_{\overline{A\cup B}} = 2\chi_{A-B} - \chi_{B-A} + \chi_{A\cap B}$$

vi) L'écriture canonique de $|\boldsymbol{f}|$: on a $|f|^{-1}(\{2\}) = A - B$, $|f|^{-1}(\{1\}) = (B - A) \cup (A \cap B) = B$, $|f|^{-1}(\{0\}) = \overline{A \cup B}$, d'où

$$|f| = 2\chi_{A-B} + \chi_B + 0\chi_{\overline{A\cup B}} = 2\chi_{A-B} + \chi_B$$

1- Si $\boldsymbol{f}$ est étagée alors $\boldsymbol{card}(\mathbf{Im}|\boldsymbol{f}|) \leq \boldsymbol{card}(\mathbf{Im}\,\boldsymbol{f})$ car si$\mathrm{Im}\, f = \{y_1, y_2, , \dots . y_n\}$ alors $\mathrm{Im}|f| = \{|y_1|, |y_2|, , \dots . |y_n|\}$ donc

$$card(\mathrm{Im}|f|) \leq card(\mathrm{Im}\, f)$$

$$car, \qquad s'il\ existe\ i\ et\ j\ tel\ que\ \ y_i = -y_j\ alors\ \ |y_i| = |y_j|\ \ donc\ \ card(\mathrm{Im}|f|) \leq n - 1 < n = \ card(\mathrm{Im}\, f)$$

2- Une condition suffisante sur les éléments de Im $\boldsymbol{f}$ pour avoir $\boldsymbol{card}(\mathbf{Im}|\boldsymbol{f}|) < \boldsymbol{card}(\mathbf{Im}\,\boldsymbol{f})$ est la suivante

$$\exists\ i, j \in \{1,2, \dots, n\}\ :\ \ y_i = -y_j$$

3- L'ensemble $\boldsymbol{X}$ est muni d'une tribu $\boldsymbol{\mathcal{T}}$. Si $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ est étagée et $\boldsymbol{\mathcal{T}}$-mesurable alors $|\boldsymbol{f}|$ l'est aussi.

D'après la question1, la fonction $|f|$ est étagée car $card(\mathrm{Im}|f|) \leq card(\mathrm{Im}\, f)$ donc $\mathrm{Im}|f|$ est fini puisque $\mathrm{Im}\, f$ est fini.

Montrer qu'elle est $\mathcal{T}$-mesurable. Soit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction valeur absolue, on a $|f| = vof$. En effet,

$$|f| : x \mapsto |f(x)| \qquad et\ \ vof\ :\ x \mapsto vof(x) = v\big(f(x)\big) = |f(x)|.$$

Donc $|f| = vof$.

Ainsi, on a :

$$f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \quad mesurable \quad\ et\ \ v :\ \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \quad mesurable \quad (car\ v\ est\ continue)$$

La fonction $|f|$ est la composée de fonctions mesurables donc elle est $\big(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurable.

3- La réciproque est fausse. La fonction $f = \chi_A - \chi_{\bar{A}}$ où $A \notin \mathcal{T}$ en est un contre exemple. En effet, f n'est pas mesurable car A n'est pas mesurable et $|f| = 1 = \chi_X$ est mesurable car X est mesurable.