Université de Tlemcen | Département de Mathématiques

3^{e} Année Licence - S5 | 5 Janvier 2020

Espaces Normés et Analyse Hilbertienne | Examen Partiel | 1H30

***Exercice 1*:** *Soit E un espace de Hilbert dont le produit scalaire est noté par $\langle .,. \rangle$ et la norme associée est $\|.\|$ et soit F un sous-espace fermé de E.*

Soit $P: E \longrightarrow F$ la projection orthogonale sur F.

1. *Vérifier que P est bien définie.*
2. *Montrer que P est linéaire et continue.*
3. *Déterminer $KerP$, noyau de P.*
4. *Vérifier que $P \circ P = P$.*

***Exercice 2*:** *Soient E un espace de Hilbert et $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ une famille libre de E.*

On pose

$$v_1 = u_1 \ \ et \ \ v_n = u_n - P_{n-1}(u_n)\ ,\ n \geq 2$$

où $P_{n-1}(u_n)$ est la projection orthogonale du vecteur u_n sur le sous-espace F_{n-1} engendré par les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

Montrer que la famille $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est orthogonale.

***Exercice 3*:** *Soit $E = C([-1,1\,],\ \mathbb{R}) = \{f: [-1,1\,] \longrightarrow \mathbb{R},\ continue\}$.*

1. *Montrer que l'espace de Banach $(E, \|.\|_\infty\,)$ n'est pas un espace de Hilbert.*
2. *On munit E du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)(1 - x^2)dx,$$

et soit F l'ensemble des fonctions affines.

a. *Soit $f(x) = x^2$. Montrer que la projection orthogonale g de f sur F existe.*

b. *Déterminer g. En déduire $d(f, F)$ distance de la fonction f à F.*

Barème: *Exercice 1: 7pts* *Exercice 2: 5pts* *Exercice 3: 8pts.*

Bon Courage

Corrigé

***Exercice 1*:** *Soient E un espace de Hilbert, F un sous-espace fermé de E et*
$P: E \longrightarrow F$ la projection orthogonale sur F.

1. *F est un sous-espace fermé donc F est un convexe fermé de l'espace de Hilbert E, ainsi la projection orthogonale sur F de tout vecteur de E existe et est unique.*
2. *Montrons que P est linéaire et continue.*
   Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$. On a, puisque le produit scalaire est linéaire
   $$\langle x + \alpha y - P(x) - \alpha P(y), z\rangle = 0 \qquad \forall z \in F.$$
   D'autre part $\langle x + \alpha y - P(x + \alpha y), z\rangle = 0 \qquad \forall z \in F.$
   Par unicité de la projection de $x + \alpha y$ sur F on obtient
   $$P(x + \alpha y) = P(x) + \alpha P(y).$$
   L'application P est donc linéaire. **(1 pt)**
   L'application P est continue. En effet, les vecteurs $x - P(x)$ et $P(x)$ sont orthogonaux puisque $\langle x - P(x), P(x)\rangle = 0$ car $P(x) \in F$.
   Le théorème de Pythagore s'applique :
   $$\|x - P(x) + P(x)\|^2 = \|x - P(x)\|^2 + \|P(x)\|^2,$$
   soit
   $$\|x\|^2 = \|x - P(x)\|^2 + \|P(x)\|^2.$$
   D'où $\|P(x)\|^2 \leq \|x\|^2$.
   Ainsi, $\forall x \in E, \|P(x)\| \leq \|x\|$. La continuité de P en découle. **(1 pt)**

3. *Déterminons le noyau de P.* **(2 pts)**
   $$KerP = \{x \in E;\ P(x) = 0\}.$$
   Soit $x \in KerP$. Comme $\langle x - P(x),\ z\rangle = 0$ pour tout $z \in F$, alors
   $$\langle x, z\rangle = 0, \forall z \in F$$
   et donc $x \in F^{\perp}$. Nous avons donc $KerP \subset F^{\perp}$.
   Inversement, soit $x \in F^{\perp}$.
   On a $\langle x - P(x),\ P(x)\rangle = 0$ car $P(x) \in F$.
   D'où $\langle P(x),\ P(x)\rangle = \langle x,\ P(x)\rangle = 0$, $(x \in F^{\perp})$, et nous obtenons $\|P(x)\|^2 = 0$.
   D'où $P(x) = 0$ et donc $x \in KerP$. Ce qui implique que $F^{\perp} \subset KerP$
   et nous concluons que $KerP = F^{\perp}$.

4. *Vérifions que $P \circ P = P$.* **(2 pts)**
   Soit $x \in E$, alors $P(x) \in F$ d'où $P\big(P(x)\big) = P(x)$, d'où $P \circ P = P$.
   On peut aussi le voir autrement : On a $\langle z - P(z),\ y\rangle = 0, \forall z \in E, \forall y \in F$.
   En particulier pour $z = P(x)$: $\langle P(x) - P\big(P(x)\big),\ y\rangle = 0,\ \forall y \in F$.
   D'où $P(x) - P\big(P(x)\big) \in F^{\perp}$ or $P(x) - P\big(P(x)\big) = P\big(x - P(x)\big) \in F$,
   ainsi $P(x) - P\big(P(x)\big) = 0$, ce qui donne $P\big(P(x)\big) = P(x), \forall x \in E$.

Exercice 2: *Soit* $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ *une famille libre d'un espace de Hilbert E. On pose*

$$v_1 = u_1 \ \ et \ \ v_n = u_n - P_{n-1}(u_n)\ ,\ n \geq 2$$

où $P_{n-1}(u_n)$ *est la projection orthogonale du vecteur* u_n *sur le sous-espace* F_{n-1} *engendré par les vecteurs* $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$.

Montrons que la famille $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ *est orthogonale ; ceci revient à montrer que*

$$\langle v_n, v_k\rangle = 0, \qquad \forall k, n \geq 1, k \neq n.$$

Supposons $2 \leq k < n$.

On a $\langle v_n, v_k\rangle = \langle u_n - P_{n-1}(u_n), u_k - P_{k-1}(u_k)\rangle$.

Remarquons que $u_k \in F_k$ *et* $P_{k-1}(u_k) \in F_{k-1} \subset F_k$ *, d'où* $w_k \coloneqq u_k - P_{k-1}(u_k) \in F_k$.

Ainsi $\langle v_n, v_k\rangle = \langle u_n - P_{n-1}(u_n), w_k\rangle$ *avec* $w_k \in F_k \subseteq F_{n-1}$ $(F_k \subseteq F_{n-1} car\ k \leq n-1.)$

Comme la projection sur le sous-espace F_{n-1} *est caractérisée par*

$$\langle x - P_{F_{n-1}}(x), y\rangle = 0, \forall x \in E, \forall y \in F_{n-1},$$

alors $\langle u_n - P_{n-1}(u_n), w_k\rangle = 0$ *car* $w_k \in F_{n-1}$, *d'où* $\langle v_n, v_k\rangle = 0$. $(\boldsymbol{3\ pts})$

Si $\boldsymbol{k = 1}$ *et* $n \geq 2$ *alors* $\langle v_n, v_1\rangle = \langle u_n - P_{n-1}(u_n), u_1\rangle$.

Et étant donné que $u_1 \in F_{n-1}$ *pour tout* $n \geq 2$, $\langle u_n - P_{n-1}(u_n), u_1\rangle = 0$,

alors $\langle v_n, v_1\rangle = 0$. $(\boldsymbol{2\ pts})$

En conclusion, $\langle v_n, v_k\rangle = 0$, $\forall k, n \geq 1, k \neq n$ *i.e. la famille* $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ *est orthogonale.*

Exercice 3: $E = C([-1,1], \mathbb{R}) = \{f: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ continue\}$.

1. *Montrons que l'espace de Banach* $(E, \|.\|_\infty)$ *n'est pas un espace de Hilbert. Il suffit de vérifier que la norme* $\|.\|_\infty$ *ne satisfait pas l'identité du parallélogramme, i.e*
$$\exists f, g \in E: \|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 \neq 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2). \quad (\boldsymbol{1\ pt})$$
Prenons $f(x) = x$, $g(x) = 1$ *alors*
$$\|f+g\|_\infty^2 = 4 = \|f-g\|_\infty^2 \ et\ \|f\|_\infty^2 = 1 = \|g\|_\infty^2,$$
Par suite $\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 \neq 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2)$. $(\boldsymbol{1\ pt})$
Donc $(E, \|.\|_\infty)$ *n'est pas un espace de Hilbert.*

2. *On munit E du produit scalaire*

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)(1-x^2)dx,$$

et soit F l'ensemble des fonctions affines.

a. *Soit* $f(x) = x^2$. *Montrons que la projection orthogonale g de f sur F existe.*
On a $F = \{f \in E; f(x) = ax + b, \text{où } a, b \in \mathbb{R}\}$
L'ensemble F peut-être identifié à l'espace $\mathbb{R}_1[X]$ *des polynômes de degré* ≤ 1.
Donc F est un sous-espace fermé de E (*puisque* $\dim F = 2 < \infty$) *et par suite la projection orthogonale de f sur F existe.* (**2 pts**)

b. *Déterminons* $g = P_F(f)$. *On a*

$$g = P_F(f) \Longrightarrow \begin{cases} g \in F \\ f - g \in F^{\perp} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} g(x) = ax + b \\ \langle f-g,h\rangle = 0 \;\; \forall h \in F. \end{cases} (1)$$

Le sous-espace F est engendré par les fonctions monômes 1 et X, d'où

$$(1) \Longrightarrow \begin{cases} g(x) = ax + b \\ \langle f-g, X\rangle = 0 \\ \langle f-g, 1\rangle = 0. \end{cases}$$

Calculons a et b : Ce dernier système donne

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} x(x^2 - ax - b)\,(1-x^2)dx = 0 \\ \int_{-1}^{1} (x^2 - ax - b)\,(1-x^2)dx = 0. \end{cases}$$

Après calcul des deux intégrales, on trouve $a = 0$ *et* $b = 1/5$, *et par conséquent* $g(x) = 1/5$. (**2 pts**)

c. *Déduction de* $d(f,F)$ *distance de la fonction f à F.*
On a

$$d(f,F) = \|f-g\|$$

$$\|f-g\|^2 = \int_{-1}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)^2 (1-x^2)dx = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1/5)^2\,(1-x^2)dx$$

$$\|f-g\|^2 = 2\int_{0}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{5}\right)^2 (1-x^2)dx$$

$$= 2\left[-\frac{1}{7}x^7 + \frac{7}{25}x^5 - \frac{11}{75}x^3 + \frac{1}{25}x\right]_0^1 = \frac{32}{525}.$$

Finalement

$$d(f,F) = \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{21}}\,.$$ (**2pts**)