Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 4 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants, calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ (Faites-vous aider par le dessin de D).

1. $f(x,y) = xy \quad , \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big/ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x+y \leq 1\right\}$
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^3} \quad , \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big/ x \geq 1\,,\ y \geq 1\,,\ x+y \leq 3\right\}$
3. $f(x,y) = \ln(1+x+y) \quad , \quad D$ le triangle de sommets $O(0,0), A(1,0), B(0,2)$.
4. $f(x,y) = \cosh(x+y) \quad , \quad D$ le trapèze de sommets $A(-2,0), B(2,0), E(1,1), F(-1,1)$.
5. $f(x,y) = x\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad , \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big/ x \geq y \geq 0\,,\ x^2+y^2 \leq \pi\right\}$
6. $f(x,y) = x^2+y^2$ D le domaine délimité par deux cercles : celui de centre $O(0,0)$ et de rayon 3, et celui de centre $A(1,0)$ et de rayon 1.

Exercice 2 : Dans chacun des cas suivants, calculer $\displaystyle\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$.

1. $f(x,y,z) = xyz \quad , \quad D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big/\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\,,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$
2. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \quad , \quad D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big/\ |x|+|y|+|z| \leq 1\right\}$
3. $f(x,y,z) = |xyz| \quad , \quad D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big/\ 1 \geq z \geq 0\,,\ x^2+y^2 \leq z^2\right\}$
4. $f(x,y,z) = \sqrt{R^2-(x^2+y^2+z^2)}$, D la boule de centre $O(0,0,0)$ et de rayon R.
5. $f(x,y,z) = 1 \quad , \quad D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big/\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{z}{c}\right)^{2/3} \leq 1\right\}$ avec $a,b,c > 0$. On pourra, par un changement adéquat, se ramener à une boule euclidienne.

Exercice 3 : Soient C_x et C_y deux cylindres pleins de même rayon R et d'axes OX et OY respectivement. Calculer le volume du domaine $D = C_x \cap C_y$. (On commencera par écrire les inégalités définissant chacun des deux cylindres)

Exercice 4 : On se propose d'évaluer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ en utilisant une intégrale double.

1. Montrer d'abord que I est convergente.
2. On considère $J_{a,b} = \displaystyle\iint_{0\leq x\leq a, 0\leq y\leq b} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}$. A l'aide du théorème de Fubini, réduire de deux façons $J_{a,b}$ à deux intégrales simples $J^1_{a,b}$ et $J^2_{a,b}$ (on ne demande pas de les calculer).
3. En justifiant le passage à la limite dans $J^1_{a,b}$ et $J^2_{a,b}$ quand $a,b \longrightarrow +\infty$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$.
4. En déduire la valeur de I.