Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de Mathématique
LMD - 2éme année mathématique - Année Universitaire – 2019 / 2020

Examen de rattrapage de probabilité

<u>Les livres et documents sont interdits, ainsi que la calculatrice et le téléphone portable.</u>

Exercice 1 (6 Pts)

I) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,, P(X > k+1) = \frac{1}{2}\, P(X > k)$$

1) Déterminer la loi de X et en déduire $E(X)$ et $Var(X)$ (4 Pts) + (1 Pt) + (1 Pt)

Exercice 2 (8 Pts)

Soit X une v.a.r de densité de probabilité f_X définie par : $f_X(x) = \begin{cases} 1-|x| & si \quad x \in [-1\,;1] \\ 0 & si \ x \notin [-1\,;1] \end{cases}$

1) Tracer la graphe de f_X (0.5 Pt)

2) Calculer $E(X)$ et $Var(X)$ (1Pt) + (1Pt)

3) Déterminer la fonction de répartition F_X de la v.a.r X (2.5 Pts)

4) On définit la valeur médiane m comme l'unique solution de l'équation $F_X(x) = \frac{1}{2}$ et le mode x_M la valeur pour laquelle la densité f_X est maximale.

Déterminer m et x_M . (0.5 Pt) + (0.5 Pt)

5) Calculer :

i) $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4})$; ii) $P(|X| > \frac{1}{2})$ (1 Pt) + (1 Pt)

Exercice 3 (6 Pts)

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.

1) En utilisant la table de la loi normale centrée et réduite, calculer :

a) $P(-1 \leq X \leq 1)$ (1 Pt)

b) $P(m-\sigma \leq Y \leq m+\sigma)$. (1.5 Pts)

2) On suppose : $Y = 4\,X + 15$.

i) Calculer $E(Y)$ et $Var(Y)$ (0.5 Pt) + (0.5 Pt)

i) En déduire la d.d.p de la v.a.r Y. (1 Pt)

ii) Déterminer le réel λ pour que $P(10 \leq Y \leq \lambda) = 0.8543$ (1.5 Pts)

NB : <u>Toutes vos réponses doivent être justifiées et argumentées.</u>

- Corrigé succinct - Rattrapage - Sept 2020

- Probabilité -

Exercice 1 (6 pts)

1) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X>k+1) = \frac{1}{2} P(X>k)$

On remarque $(X>0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X=k) \Rightarrow P(X>0) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = 1$

or $P(X>1) = P(X>0+1) = \frac{1}{2} P(X>0) = \frac{1}{2}$

Supposons $P(X>k) = \frac{1}{2^k}$ (on a $P(X>0) = 1 = \frac{1}{2^0}$ et $P(X>1) = \frac{1}{2^1}$)

On a $P(X>k+1) = \frac{1}{2} P(X>k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k+1}}$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $P(X>k) = \frac{1}{2^k}$

Par ailleurs $\forall k \geq 1$: $(X>k-1) = (X=k) \cup (X>k)$

$\Rightarrow P(X>k-1) = P(X=k) + P(X>k)$

$\Rightarrow P(X=k) = P(X>k-1) - P(X>k) = \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^k}$

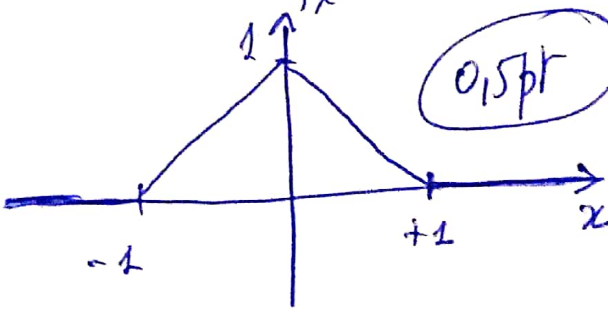
Donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{k-1}}$

Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $p = \frac{1}{2}$ et par conséquent
(4 pts)

$E(X) = \frac{1}{p} = 2$ (1 pt) et $Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = 2$ (1 pt)

Exercice 2 (8 pts)

1) $f_X(x) = (1-|x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$



(0,5 pt)

$E(X) := \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x(1-|x|)\,dx = 0$ 0,5 pt 0,5 pt

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} x^2(1-|x|)\,dx = 2\int_0^1 x^2(1-x)\,dx$ 0,5 pt

$\Rightarrow Var(X) = 1/6$ 0,5 pt

3) $F_X(x) := \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ 0,5 pt or $f_X(t) = (1-|t|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$

* $x \leq -1$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = 0$ 0,5 pt

* $-1 < x \leq 0$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{x} (1+t)\,dt = \frac{1}{2}(1+x)^2$ 0,5 pt

* $0 < x < 1$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{0} f_X(t)\,dt + \int_{0}^{x} f_X(t)\,dt = 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2$ 0,5 pt

* $x \geq 1$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f_X(t)\,dt + \int_{+1}^{x} f_X(t)\,dt = 1$ 0,5 pt

Ainsi $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}(1+x)^2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

II /4

4) on vérifie la relation $F_X(m) = \frac{1}{2}$

ce qui équivaut à

$$F_X(m) = P(X \le m) = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = P(X > m)$$

d'où $m = 0$ 0,5 pt

la valeur maximum de f est 1, elle correspond au mode :

$x_M = 0$ 0,5 pt

5) i) $P(-\frac{1}{2} \le X \le 1/4) = F_X(\frac{1}{4}) - F_X(-1/2) = \frac{19}{32}$ 1 pt

ii) $P(|X| > 1/2) = 1 - P(|X| \le 1/2)$

$$= 1 - \left[F_X(\tfrac{1}{2}) - F_X(-\tfrac{1}{2})\right]$$

$$= 1 - F_X(1/2) + F_X(-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$ 1 pt

Exercice 3 6 pts

1) $X \hookrightarrow N(0,1)$ et $Y \hookrightarrow N(m, \sigma^2)$

a) $P(-1 \le X < 1) = \phi(1) - \phi(-1) = \phi(1) - (1 - \phi(1))$

$$= 2\phi((1)) - 1 \underset{\text{la table}}{\overset{\text{d'après}}{=}} (2 \cdot 0{,}8413) - 1$$

$\Rightarrow P(-1 \le X < 1) = 0{,}6826$ 1 pt

b) $P(m - \sigma \le Y \le m + \sigma) = P(-\sigma \le Y - m \le \sigma)$

$$= P\left(-1 \le \frac{Y-m}{\sigma} \le 1\right)$$

or $\frac{Y-m}{\sigma} \hookrightarrow N(0,1)$

d'où $P(m-\sigma \leq Y \leq m+\sigma) = P(-1 \leq X \leq 1) = 0,6826$ 1pt

2) On suppose $Y = 4X+15$

i) $E(Y) = E(4X+15) = 4E(X)+15 = 15$ 0,5pt

$Var(Y) = Var(4X+15) = 16Var(X) = 16$ 0,5pt

ii) Or $Y = 4X+15$, une transformation affine d'une loi normale, donc $Y \hookrightarrow N(m, \sigma^2)$ avec $m=15$ et $\sigma=4$ et par conséquent $f_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-15}{4}\right)^2\right)$. 1pt

iii) $P(10 \leq Y \leq \lambda) = P\left(\frac{10-15}{4} \leq \frac{Y-15}{4} \leq \frac{\lambda-15}{4}\right) = 0,8543$

$\Rightarrow \phi\left(\frac{\lambda-15}{4}\right) - \phi(-1,25) = 0,8543$

$\Rightarrow \phi\left(\frac{\lambda-15}{4}\right) + \phi(1,25) - 1 = 0,8543$

$\Rightarrow \phi\left(\frac{\lambda-15}{4}\right) = 1 + 0,8543 - 0,8944 = 0,9544$

d'après la table $\frac{\lambda-15}{4} = 1,75 \Rightarrow \underline{\lambda = 22}$

1,5pt

II/4