Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020

$2^{\text{ème}}$ année Mathématiques
Semestre 2

Examen de Rattrapage de Géométrie

Durée : 1h30mn
12 Novembre 2020

Exercice 1. (4pts)

Calculer la longueur des courbes suivantes :

1. L'arc de courbe d'équation $y = x^{\frac{3}{2}}$ pour $1 \leq x \leq 3$.
2. La courbe paramétrée par : $t \in [0, \pi] \mapsto \alpha(t) = (\cos t + \cos^2 t, \sin t + \sin t \cos t)$

Exercice 2. (6pts)

1. Soit $\alpha(s)$ la paramétrisation d'une courbe plane par abscisse curviligne, $T(s)$ le vecteur tangent unitaire, $\theta(s)$ l'angle $(\overrightarrow{Ox}, T(s))$ et $\kappa(s)$ la courbure.
   Montrer que $\kappa(s) = \dfrac{d\theta(s)}{ds}$.
2. Application à l'arc de cycloïde, défini par la paramétrisation

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

   Préciser l'abscisse curviligne s, l'angle θ et la courbure κ.

Exercice 3. (10pts)

On considère la pseudosphère Σ définie par la paramétrisation

$$f(u, v) = \left(\exp(u) \cos v, \exp(u) \sin v, \int_0^u \sqrt{1 - \exp(2t)}dt\right)$$

1. Déterminer les points réguliers de la surface Σ.
2. Donner l'expression d'un vecteur normal unitaire en tout point régulier de Σ.
3. Donner une équation cartésienne du plan tangent à Σ en un point régulier p de Σ.
4. Calculer en tout point p de la surface les deux formes fondamentales, ainsi que les courbures principales.
5. En tout point $p = f(u, v)$ de la surface Σ, calculer la courbure moyenne et la courbure de Gauss.

Corrigé de l'examen de Rattrapage de Géométrie
2019-2020

Exercice1. (4pts)

1. La longueur de la courbe d'équation $y = f(x)$, pour x compris entre a et b $(a < b)$ est donnée par
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \quad (0,5pt)$$
On a
$$f'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t} \quad (0,5pt)$$
donc
$$l = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{9t}{4}} dt = \frac{2}{3}.\frac{4}{9}\left[\left(1 + \frac{9t}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3$$
$$= \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{27}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{27}\left[31\sqrt{31} - 13\sqrt{13}\right]. \quad (1pt)$$
2. On a
$$\alpha'(t) = (-\sin t - \sin 2t, \cos t + \cos 2t)b \quad (0.5)pt$$
donc
$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2 + 2\cos t} = 2\left|\cos\frac{t}{2}\right|$$
Alors
$$l = 2\int_0^\pi \left|\cos\frac{t}{2}\right| dt \quad (0.5pt)$$
Mais $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ est positif sur $[0, \pi]$ $(0.5pt)$, donc
$$l = 2\int_0^\pi \cos\frac{t}{2} dt = 2\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^\pi = 4 \quad (0.5pt)$$

Exercice 2. (06pts)

1. Soit $\alpha(s)$ la paramétrisation d'une courbe plane par abscisse curviligne.
Le vecteur tangent unitaire s'exprime en fonction de l'angle $\theta(s)$ par :
$$T(s) = \cos\theta(s)\overrightarrow{i} + \sin\theta(s)\overrightarrow{j} \quad (0.5pt)$$
En utilisant les formules de Frenet, il vient :
$$\frac{T(s)}{ds} = \frac{d\theta(s)}{ds}\left(-\sin\theta(s)\overrightarrow{i} + \cos\theta(s)\overrightarrow{j}\right) = \frac{d\theta(s)}{ds}.N = \kappa(s).N \quad (0.5pt + 0.5pt)$$
D'où le résultat : $\kappa(s) = \dfrac{d\theta(s)}{ds}$ $(0.5pt)$

2. Application à l'arc de cycloïde, défini par la paramétrisation

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

On a $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ de norme

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2 - 2\cos} = \sqrt{2}\sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}}.$$

a) L'abscisse curviligne s comptée à partir du point $t = 0$ est donc

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| \, du = \int_0^t \sqrt{2 - 2\cos u} du = 2\int_0^t \left|\sin \frac{u}{2}\right| du \quad (0.5pt)$$

et comme $\sin \frac{u}{2}$ est positif sur $[0, 2\pi]$ (0.5pt), alors

$$s(t) = 2\int_0^t \sin \frac{u}{2} du = 4\left[-\cos \frac{u}{2}\right]_0^t \quad (0.5pt)$$

D'où

$$s(t) = 4\left(1 - \cos \frac{t}{2}\right) \quad (0.5pt)$$

b) Le vecteur tangent unitaire est

$$T(s) = \left(\frac{1 - \cos t}{2\sin \frac{t}{2}}, \frac{\sin t}{2\sin \frac{t}{2}}\right) = \left(\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2}\right) \quad (0.25pt)$$

D'où

$$\begin{cases} \cos\theta(s) = \sin \frac{t}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) \\ \sin\theta(s) = \cos \frac{t}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) \end{cases} \quad (0.5pt)$$

ainsi

$$\theta(s) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}. \quad (0.25pt)$$

c) La courbure est

$$\kappa(s) = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dt}.\frac{dt^{-1}}{ds} = \frac{-\frac{1}{2}}{4(\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2})} = \frac{-1}{4\sin\frac{t}{2}}. \quad (1pt)$$

Exercice 3. (10pts)

On considère la pseudosphère Σ définie par la paramétrisation

$$f(u, v) = \left(\exp(u)\cos v, \exp(u)\sin v, \int_0^u \sqrt{1 - \exp(2t)} dt\right)$$

1. Déterminer les points réguliers de Σ

Un point $p = f(u, v)$ est régulier si et seulement si la famille $\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$ est libre.

On a

$f_u = (\exp(u)\cos v, \exp(u)\sin v, \sqrt{1 - \exp(2u)}), \quad f_v = (-\exp(u)\sin v, \exp(u)\cos v, 0)$

(0.5pt+0.5pt)

Déterminons maintenant le produit vectoriel de ces deux vecteurs

$f_u \wedge f_v = (-\exp(u)\sqrt{1 - \exp(2u)}\cos v, -\exp(u)\sqrt{1 - \exp(2u)}\sin v, \exp(2u)) \quad (0.5pt)$

Ce vecteur n'est jamais nul, donc tout les points de Σ sont réguliers. (0.5pt)

2. Le vecteur normal unitaire est donné par

$$N_p(u,v) = \frac{f_u(u,v) \wedge f_v(u,v)}{\|f_u(u,v) \wedge f_v(u,v)\|}$$

Or

$$\|f_u(u,v) \wedge f_v(u,v)\| = \exp(u) \quad \color{red}{(0.5pt)}$$

d'où

$$N_p(u,v) = (-\sqrt{1-\exp(2u)}\cos v, -\sqrt{1-\exp(2u)}\sin v, \exp(u)) \quad \color{red}{(0.5pt)}$$

3. *Déterminer une équation cartésienne du plan tangent*
On se place en un point $p = f(u,v)$ régulier.
On sait alors que la surface admet en p un plan tangent dont le vecteur N_p est un vecteur normal
On a calculé ce vecteur à la question précédente. Soit $m(x,y,z)$ un point du plan tangent, une équation de cet espace en $p = f(u,v)$ est donc

$$\overrightarrow{pm}.N_p = 0 \quad \color{red}{(0.5pt)}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{1-e^{2u}}\cos v)x + (\sqrt{1-e^{2u}}\sin v)y - e^u z = -e^u\left(\sqrt{1-e^{2u}} - \int_0^u \sqrt{1-e^{2t}}dt\right) \quad \color{red}{(0.5pt)}$$

4. *Calculer la deux formes fondamentales et les courbures principales :*

La matrice associée à la première forme fondamentale :

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u.f_u & f_u.f_v \\ f_u.f_v & f_v.f_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(2u) \end{pmatrix} \quad \color{red}{(1pt)}$$

La matrice associée à la deuxième forme fondamentale :

$$II_p = \begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{uu}.N & f_{uv}.N \\ f_{uv}.N & f_{vv}.N \end{pmatrix}$$

d'autre part

$$f_{uu} = \left(\exp(u)\cos v, \exp(u)\sin v, \frac{-\exp(2u)}{\sqrt{1-exp(2u)}}\right), f_{uv} = (-\exp(u)\sin v, \exp(u)\cos v, 0)$$

$$f_{vv} = (-\exp(u)\cos v, -\exp(u)\sin v, 0) \quad \color{red}{(0.75pt)}$$

Ainsi

$$II_p = \begin{pmatrix} l & m \\ m & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\exp(u)}{\sqrt{1-\exp(2u)}} & 0 \\ 0 & \exp(u)\sqrt{1-\exp(2u)} \end{pmatrix} \quad \color{red}{(0.75pt)}$$

La matrice associée à l'opérateur S_p est

$$B = I_p^{-1}II_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-2u) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-\exp(u)}{\sqrt{1-\exp(2u)}} & 0 \\ 0 & \exp(u)\sqrt{1-\exp(2u)} \end{pmatrix} \quad \color{red}{(0.5pt)}$$

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{-\exp(u)}{\sqrt{1-\exp(2u)}} & 0 \\ 0 & \exp(-u)\sqrt{1-\exp(2u)} \end{pmatrix} \quad \color{red}{(0.5pt)}$$

Ainsi, les courbures principales sont

$$\kappa_1 = \frac{-\exp(u)}{\sqrt{1-\exp(2u)}}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{\kappa_1} = \frac{\sqrt{1-\exp(2u)}}{\exp(u)} \quad \color{red}{(0.5pt + 0.5pt)}$$

5. La courbure de Gauss est donnée par

$$K = \kappa_1.\kappa_2 = \det B = -1 \quad \color{red}{(1pt)}$$

Finalement la courbure moyenne

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1-2\exp(2u)}{\exp(u)\sqrt{1-\exp(2u)}}\Big) \quad \color{red}{(0.5pt)}$$