Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 4.
Module : *Analyse 4* - Épreuve de Rattrapage .
Lundi 09/11/2020 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (10pts) On considère la fonction définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue au point $(0,0)$.
2. Soit $\omega=(a,b)$ un vecteur quelconque. Montrer que la dérivée de f au point $(0,0)$ dans le sens du vecteur ω existe.

Exercice 2 : (10pts) On considère la fonction définie par :

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Montrer que g est continue au point $(0,0)$.
2. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en tout point.
3. Les dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ sont-elles continues au point $(0,0)$?
4. La fonction g est-elle différentiable en $(0,0)$?

$2^{\text{ème}}$ année de Licence de Mathématiques - 2019/2020.

Module: « Analyse 4 » - Epreuve de Rattrapage.

Corrigé.

Exercice 1: (10pts) $f(x,y) = \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1°/ f est non-continue en (0,0): Il suffit de trouver un chemin ou bien une suite allant à (0,0) sur le (la)-quel la limite de la fonction n'est pas 0. Par exemple les point (y^2, y); On aura $\lim\limits_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{y^2}{y^2}\right) = 1 \neq f(0,0)$. 04

Donc f n'est pas continue en (0,0).

2°/ Calcul de $(D_\omega f)(0,0)$ avec $\omega = (a,b)$ qcq:

D'après la définition on a: $(D_\omega f)(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\omega) - f(0,0)}{t}$

$f((0,0)+t\omega) = f(ta,tb) = \frac{t^2b^2}{ta}$ (si $a \neq 0$)

$= t\, b^2/a \Rightarrow \frac{f((0,0)+t\omega) - f(0,0)}{t} = b^2/a$

D'où $(D_\omega f)(0,0) = b^2/a$ si $a \neq 0$.

Voyons le cas $a = 0$. $(\omega = (0,b))$ 06

$f((0,0)+t(0,b)) = f(0,tb) = 0 \Rightarrow \frac{f((0,0)+t(0,b)) - f(0,0)}{t} = 0$

donc $(D_\omega f)(0,0) = 0$ si $a = 0$.

Dans tous les cas donc, la dérivée de f au pt (0,0) dans la direction du vecteur $\omega = (a,b)$ existe.

Exercice 2 : (10 pts) $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

1°/ g est continue en (0,0) : En effet on a :

$$|g(x,y)-g(0,0)| = |g(x,y)| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq |x|\frac{x^2}{x^2+y^2} + |y|\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$\leq |x|+|y| \quad \text{car } \frac{x^2}{x^2+y^2}\leq 1 \text{ et } \frac{y^2}{x^2+y^2}\leq 1.$$

donc $0 \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |g(x,y)-g(0,0)| \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|) = 0.$ 2pts

d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0).$

2°/ Calcul de $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$:

* Si $(x,y)\neq(0,0)$, $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$.

En (0,0) ; $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{x}\right) = 1.$

donc $\boxed{\dfrac{\partial g}{\partial x} = \begin{cases}\dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}}$ 2pts

* Si $(x,y)\neq(0,0)$; $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{3y^2(x^2+y^2)-2y(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{3x^2y^2+y^4-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$

En (0,0) : $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{g(0,y)-g(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}(y/y) = 1.$

donc $\boxed{\dfrac{\partial g}{\partial y} = \begin{cases}\dfrac{y^4+3x^2y^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}}$ 2pts

3°/ Etude de la continuité en (0,0) de $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$:

On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial g}{\partial x}(x,x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^4+3x^4-2x^4}{4x^4}\right) = 1/2 \neq 1$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial g}{\partial x}(x,x) \neq \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$, càd $\frac{\partial g}{\partial x}$ n'est pas continue en (0,0). 1pt

De même $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial g}{\partial y}(x,x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^4+3x^4-2x^4}{4x^4}\right) = 1/2 \neq 1$ 1pt

et donc $\frac{\partial g}{\partial y}$ n'est pas continue en (0,0).

4°/ Différentiabilité de g en (0,0) :

La différentiabilité peut s'étudier en revenant à la définition. En effet si la différentielle existe, elle est forcément égale à

$dg_{(0,0)}(h_1,h_2) = h_1 \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) + h_2 \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = h_1+h_2$; et doit vérifier que $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{g(h_1,h_2)-g(0,0)-dg_{(0,0)}(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$. 2pts

On a $R(h_1,h_2) = \frac{g(h_1,h_2)-g(0,0)-dg_{(0,0)}(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$

$$= \frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - 0 - (h_1+h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{h_1h_2(h_1+h_2)}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

Il est facile de voir que $\lim\limits_{h\to 0} R(h,h) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$.

Donc g n'est pas différentiable en (0,0).