Université de Tlemcen le 10/11/2020

Faculté des sciences

L2 Mathématiques

Rattrapage du module "Algèbre 4"

durée : 1h30.

Exercice n°1

Soit $q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \longmapsto q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4$$

1°/ Montrer que q est une forme quadratique.

2°/ Déterminer $M(q)_e$ où $\{e\} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3°/ Déterminer $rg(q)$ et $N(q)$

4°/ Déterminer une base $\{v_i\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ orthogonale pour q.

5°/ Déterminer le cône isotrope de q, $I(q)$ et $sgn(q)$.

Exercice n°2

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E. Montrer que : $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice n°3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que ${}^tA.A$ est diagonalisable.

Exercice n°4

Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$. Montrer que n est pair.

Ex1 : 10 pts ; Ex2 : 4 pts ; Ex3 : 2,5 pts ; Ex4 : 3,5 pts

Bon Courage

Espérons que cette pandémie $\longrightarrow 0$

Corrigé de l'épreuve de rattrapage du module "Algèbre 4" du 10/11/2020

Exercice n° 1

1/ $q(x)$ se présente comme un polynôme homogène de degré 2 en les composantes x_i de x dans la base canonique $\{e\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par conséquent q est une forme quadratique.

2/ $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4$.

$$\Longrightarrow \quad M(q)_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3/ $\operatorname{Det} M(q)_e = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2 \neq 0$

par rapport à la 1ère ligne

$$\Longrightarrow \operatorname{rg}(q) = 4 \Longrightarrow N(q) = \{0\}$$

4/ Utilisons la méthode de GAUSS

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4$$

$$\Rightarrow q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_3x_4 - x_4^2$$

$$\Rightarrow q(x) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + (x_3 + x_4)^2 - 2x_4^2$$

posons

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 + x_4 \\ x_4' = x_4 \end{cases} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

où $P = P_{e \to v}$, $v = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ orthogonale pour q, cherchée

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_3' - x_4' \\ x_4 = x_4' \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = P_{e \to v} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow v_1 = 1 \times e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = -e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = 1 \times e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_4 = -e_3 + e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

conclusion : $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, orthogonale pour q.

5/ $I(q) = \{x \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, q(x) = 0\}$

$= \{x = x_1' v_1 + x_2' v_2 + x_3' v_3 + x_4' v_4 \,/\, q(x) = 0\}$

$= \{ \quad / \, x_1'^2 q(v_1) + x_2'^2 q(v_2) + x_3'^2 q(v_3) + x_4'^2 q(v_4) = 0\}$

$= \quad / \, x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - 2x_4'^2 = 0\}$

$$\Longrightarrow I(q)=\left\{x=x_1'v_1+x_2'v_2+x_3'v_3+x_4'v_4 \,/\, x_4'^2=\frac{1}{2}\left(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2\right)\right\}$$

$$\Longrightarrow I(q)=\left\{x=x_1'v_1+x_2'v_2+x_3'v_3+x_4'v_4 \,/\, x_4'=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2}\right\}$$

$$\cup\left\{x=x_1'v_1+x_2'v_2+x_3'v_3+x_4'v_4 \,/\, x_4'=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2}\right.$$

- On sait que

$q(x)=(x_1+x_2)^2+x_2^2+(x_3+x_4)^2-2x_4^2$

$\Longrightarrow$ $p=3$ et $r=4$ (r on l'a déjà trouvé dans la question ③).

$\Longrightarrow$ $\operatorname{sgn} q=(3,1)$.

Exercice n° ②

on sait d'après le théorème du rang que

$$\dim E=\dim \operatorname{Ker} f+\dim \operatorname{Im} f,$$

pour montrer que $E=\operatorname{Ker} f\oplus \operatorname{Im} f$, il suffit de montrer $\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=\{0\}$ ie $\operatorname{Ker} f\cap \operatorname{Im} f\subset\{0\}$, la deuxième étant évidente du moment que $0\in\operatorname{Ker} f$ et $0\in\operatorname{Im} f$, car $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont des sous espaces vectoriels.

Montrons que $\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f\subset\{0\}$, pour cela prenons $x\in\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f$ et montrons que $x=0$, en effet:

$$x\in\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f \Longrightarrow \begin{cases} x\in\operatorname{Ker} f\\ \text{et}\\ x\in\operatorname{Im} f\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x)=0\\ \exists a\in E \,/\, x=f(a)\end{cases}$$

or

$$\langle f(a), x\rangle \xlongequal{f \text{ symétrique}} \langle a, f(x)\rangle \xlongequal{f(a)=0} 0$$

$$\Rightarrow \langle f(a), x\rangle = 0 \xRightarrow{f(a)=x} \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow x \in \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$$

Conclusion

$$\left.\begin{array}{l} \dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \\ \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$$

__Exercice n°3__

$B = {}^tA.A$ est symétrique car ${}^tB = {}^t({}^tA.A) = {}^tA\,{}^{tt}A$
$= {}^tA.A = B$

De plus B est réelle par hypothèse.

Conclusion

B est réelle et symétrique $\xRightarrow{\text{Théorème}}$ B est diagonalisable.

$\Rightarrow {}^tA.A$ est diagonalisable. c.q.f.d.

__Exercice n°4__ : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Comme A est inversible $\det A \neq 0$

d'autre part $\det A = \det {}^tA = \det(-A) = (-1)^n \det A$

$\Rightarrow \det A = (-1)^n \det A \Rightarrow (-1)^n = 1 > 0 \Rightarrow n$ est pair