Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020

$2^{\text{ème}}$ année Mathématiques
Semestre 2

Épreuve finale de Géométrie

Durée : 1h30mn
11 Octobre 2020

Exercice 1. (5pts)

1. Calculer la courbure et la torsion de la courbe α donnée par :

$$\alpha(t) = (4\cos t, 5 - 5\sin t, -3\cos t)$$

2. La courbe précédente est-elle plane ?
   Si oui, déterminer l'équation du plan contenant α.

Exercice 2. (5pts)

La tractrice est la courbe paramétrée $\gamma : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}^2$ donnée pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$\gamma(t) = (\sin t, \cos t + \ln(\tan \frac{t}{2}))$$

1. Montrer que γ est régulière.
2. Déterminer une équation paramétrique de la droite D_t tangente à γ au point $\gamma(t)$.
3. On note p_t le point d'intersection des droites D_t et (Oy). Montrer que le segment $[\gamma(t), p_t]$ est de longueur 1.

Exercice 3. (10pts)

On prend deux nombres réels $0 < r < R$. On considère le tore

$$f : [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$$

paramétré par

$$f(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

1. Calculer l'aire de cette surface.
2. Que représentent géométriquement les courbes $C_1 = \{f(0, v), v \in [0, 2\pi[\}$ et $C_2 = \{f(u, 0), u \in [0, 2\pi[\}$?
3. Calculer en tout point p de la surface la deuxième forme fondamentale, ainsi que les courbures principales.
4. En tout point $p = f(u, v)$ de la surface , calculer la courbure moyenne et la courbure de Gauss.

Corrigé de l'épreuve finale de Géométrie
2019-2020

Exercice1.

Soit la courbe suivante : $\alpha(t) = (4\cos t, 5 - 5\sin t, -3\cos t)$.

1. **a)** *Calculer la courbure de la courbe* α :
   Le vecteur vitesse de la courbe α est : $\alpha'(t) = (-4\sin t, -5\cos t, 3\sin t)$, de norme : $\|\alpha'(t)\| = 5$. **(0.5pt+0.5pt)**
   Posons $v(t) = 5$. Le vecteur tangent $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{v(t)} = \dfrac{1}{5}(-4\sin t, -5\cos t, 3\sin t)$, **(0.5pt)** et $T'(t) = \dfrac{1}{5}(-4\cos t, 5\sin t, 3\cos t)$ de norme $\|T'(t)\| = 1$. **(0.5pt)**
   La courbure est donc : $\kappa(t) = \dfrac{\|T'(t)\|}{v(t)} = \dfrac{1}{5}$. **(0.5pt)**
   b) *Calculer la torsion de la courbe* α :
   Le vecteur normal : $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \dfrac{1}{5}(-4\cos t, 5\sin t, 3\cos t)$. **(0.5pt)**
   Le vecteur binormal est : $B(t) = T(t) \wedge N(t) = \left(-\dfrac{3}{5}, 0, -\dfrac{4}{5}\right)$. **(0.5pt)**
   Comme $B(t)$ est constant, la torsion est nulle par les formules de Frenet. **(0.5pt)**
2. *La courbe précédente est-elle plane ?*
   Oui, puisque la torsion est nulle. De plus, la courbe est dans le plan d'équation $3X + 4Z = 0$. **(0.5pt+0.5pt)**

Exercice 2.

Considérons la courbe $\gamma : \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}^2$ définie par : $\gamma(t) = \left(\sin t, \cos t + \ln\left(\tan\dfrac{t}{2}\right)\right)$.

1. *Montrons que la courbe* γ *est régulière* :
   On a : $\gamma'(t) = \left(\cos t, -\sin t + \dfrac{1}{\sin t}\right) = \left(\cos t, \dfrac{\cos t}{\tan t}\right) \neq (0,0), \forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ car $\cos t \neq 0$. De plus $\|\gamma'(t)\| = \dfrac{1}{\tan^2(t)} \neq 0, \forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. **(0.5pt+0.5pt)**

2. *Déterminons une équation paramétrique de la droite* D_t *tangente à* γ :
   La droite D_t est dirigée par $\gamma'(t)$, c'est l'ensemble des point $m(t) = (x(t), y(t))$ de $\mathbb{R}^2$ tels que le vecteur $\overrightarrow{\gamma(t)m(t)}$ soit colinéaire à $\gamma'(t)$. C-à-d, il existe une fonction $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{\gamma(t)m(t)} = \lambda(t)\gamma'(t)$. **(0.5pt)**
   Ce qui donne
   $$\begin{cases} x(t) = & \lambda(t)\cos t + \sin t \\ y(t) = & \left(1 + \dfrac{\lambda(t)}{\tan t}\right)\cos t + \ln\left(\tan\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$$
   et par suite la représentation paramétrique de D_t est donnée par
   $$\left(\lambda(t)\cos t + \sin t, \left(1 + \frac{\lambda(t)}{\tan t}\right)\cos t + \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right) \quad \textbf{(1pt)}$$

3. *Montrons que le segment* $[\gamma(t), p_t]$ *est de longueur* 1 :
   Soit p_t l'intersection de la droite D_t avec l'axe (Oy) c'est-à-dire $\lambda(t)\cos t + \sin t = 0$ et donc $\lambda(t) = \dfrac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t, \quad \forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[.$ **(1pt)**
   Par suite
   $$p_t = \left(0, \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right). \quad (\mathbf{0.5pt})$$
   Calculons, maintenant la longueur du segment $[\gamma(t), p_t]$: C'est le réel
   $$\gamma(t)p_t = \left\|\overrightarrow{\gamma(t)p_t}\right\|$$
   or
   $$\overrightarrow{\gamma(t)p_t} = (-\sin t, -\cos t) \quad (\mathbf{0.5pt})$$
   de norme
   $$\left\|\overrightarrow{\gamma(t)p_t}\right\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1. \quad (\mathbf{0.5pt})$$

Exercice 3.

Soit M la surface du tore

$$f(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

$0 \le u, v < 2\pi, R > r > 0,$
Soit $p = f(u_0, v_0)$ un point de M et T_pM l'espace tangent à M au point p engendré par f_u et f_v, On a

$$f_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u), f_v = (R+r\cos u)(-\sin v, \cos v, 0) \quad (\mathbf{0.5pt+0.5pt})$$

D'où
$$f_u \wedge f_v = (R + r\cos u)(-r\cos u\cos v, -r\cos u\sin v, -r\sin u)$$
de norme $\|f_u \wedge f_v\| = r(R + r\cos u).$ **(0.5pt)**

1. L'aire de cette surface est donnée par
   $$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f_u \wedge f_v\|\, dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |(r(R + r\cos u))|\, dudv$$
   $$= \int_0^{2\pi} [|r(Ru + r\sin u)|]_0^{2\pi}\, dv = r\int_0^{2\pi} 2R\pi dv = 2Rr\pi[v]_0^{2\pi} = 4\pi^2 rR. \quad (\mathbf{0.5pt+0.5pt})$$
2. La courbe $C_1 = \{((R + r)\cos v, (R + r)\sin v, 0), v \in [0, 2\pi[\}$ est le cercle de centre $(0,0,0)$ et de rayon $(R + r)$ car on a bien : $\|f(0,v)\| = R + r$. **(0.75pt)**
   La courbe $C_2 = \{(R + r\cos u, 0, r\sin u), u \in [0, 2\pi[\}$ est le cercle de centre $(R,0,0)$ et de rayon r car on a bien : $\|f(u,0) - (R,0,0)\| = r.$ **(0.75pt)**
3. *Calculer la deuxième forme fondamentale et les courbures principales :*
   Le vecteur normal unitaire est donné par
   $$N_p(u,v) = \frac{f_u(u,v) \wedge f_v(u,v)}{\|f_u(u,v) \wedge f_v(u,v)\|}$$

En reprenant les formules ci-dessus, on a :

$$N_p = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u) \quad \textbf{(0.5pt)}$$

Calculons en suite :

$$f_{uu} = (-r\cos u \cos v, -r\cos u \sin v, -r\sin u), \; f_{uv} = (r\sin u \sin v, -r\sin u \cos v, 0)$$

$$f_{vv} = (R + r\cos u)(-\cos v, -\sin v, 0) \quad \textbf{(0.75pt)}$$

La deuxième forme fondamentale :

$$l = f_{uu}.N_p = r, \quad m = f_{uv}.N_p = 0, \quad q = f_{vv}.N_p = (R + r\cos u)\cos u. \quad \textbf{(0.75pt)}$$

d'où

$$II_p = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)\cos u \end{pmatrix}$$

La matrice associé à la première forme fondamentale :

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u.f_u & f_u.f_v \\ f_u.f_v & f_v.f_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)^2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.75pt)}$$

de déterminant $\det I_p = r^2(R + r\cos u)^2$ **(0.25pt)**.
La matrice associée à l'opérateur S_p est

$$B = I_p^{-1} II_p = \frac{1}{r^2(R + r\cos u)^2} \begin{pmatrix} (R + r\cos u)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)\cos u \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2(R + r\cos u)^2} \begin{pmatrix} r(R + r\cos u)^2 & 0 \\ 0 & r^2(R + r\cos u)\cos u \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{R + r\cos u} \end{pmatrix} \quad \textbf{(1pt)}$$

Ainsi, les courbures principales sont $\kappa_1 = \frac{1}{r}, \quad \kappa_2 = \frac{\cos u}{R + r\cos u}$ **(0.5pt+0.5pt)**.

4. La courbure de Gauss est donnée par

$$K = \kappa_1.\kappa_2 = \det B = \frac{\cos u}{r(R + r\cos u)} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

Finalement la courbure moyenne

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{R + 2r\cos u}{2r(R + r\cos u)} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

.