Université Abou Bekr Belkaid
Faculté de Sciences
Département de Mathématiques
Tlemcen

Analyse complexe
L_2, S_4, 2019-2020
1h30

Examen Final.

Ex1: 10 points Soit $f(z)=\dfrac{1-16z}{(z+3)(2z-1)^2}=\dfrac{A}{2z-1}+\dfrac{B}{(2z-1)^2}+\dfrac{C}{z+3}$

1) Déterminer les constantes réelles A, B et C? (0,5×3)

2) Développer $f(z)$ en séries de Laurent sur les domaines: $\dfrac{1}{(1-q)^2}=\sum_{n\geq 0}(n+1)q^n$ (0,5)

a) $D_1=\{z \mid |z|<\frac{1}{2}\}$; (0,5×3) b) $D_2=\{z \mid \frac{1}{2}<|z|<3\}$; (0,5×3) c) $D_3=\{z \mid |z|>3\}$ (0,5×3)

3) Calculer les intégrales $I_j=\oint_{C_j} f(z)\,dz$ où $j=1,2$ et 3

a) $C_1=\{z \mid |z|=\frac{1}{4}\}$; (0,5) b) $C_2=\{z \mid |z|=1\}$; (1) c) $C_3=\partial D_4$; $D_4=\{z \mid \frac{1}{4}\leq |z|\leq 4\}$ (1,5)

4) Que représentent les intégrales I_j? (0,5)

Ex2: 10 points Soit $g(z)=e^{-z^2}=e^{-(x+iy)^2}$ où $z=x+iy\in\mathbb{C}$; $x,y\in\mathbb{R}$

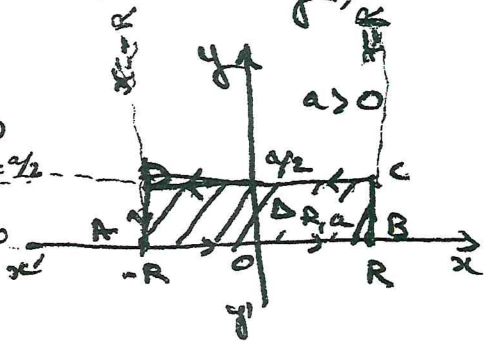
1) Déterminer $Re(g(z))$; $Im[g(z)]$; $|g(z)|$ et argument de $g(z)$? (0,5×4)

2) Vérifier les conditions de Cauchy-Riemann pour la fonction $g(z)$? (0,5×2)

3) Montrer que l'intégrale $J=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx$ converge, $\forall a\in\mathbb{R}$ (1)

4) Soit le rectangle ABCD de sommets

$A\begin{vmatrix}-R\\0\end{vmatrix}$; $B\begin{vmatrix}R\\0\end{vmatrix}$; $C\begin{vmatrix}R\\a/2\end{vmatrix}$; $D\begin{vmatrix}-R\\a/2\end{vmatrix}$, $\forall a>0$



a) Calculer $I=\oint_{\partial\Delta_{R,a}} e^{-z^2}\,dz$ (0,5)

b) On pose $I=\sum_{j=1}^{4} I_j$ où

$I_1=\int_{AB} e^{-z^2}dz$ (0,5×2); $I_2=\int_{BC} e^{-z^2}dz$; (0,5×2) $I_3=\int_{CD} e^{-z^2}dz$; (0,5×2) $I_4=\int_{DA} e^{-z^2}dz$ (0,5×2)

Déterminer $\lim\limits_{R\to+\infty} I_j$ où $j=1,2,3$ et 4? et $\lim\limits_{R\to+\infty} I$? (0,25)

c) Sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, déduire que $J=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{a^2}{4}}$ (0,25)

et $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2x^2}\cos\beta x\,dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$. (0,5)

III

4) a) $I=\oint_{\partial\Delta_{R,a}} e^{-z^2}\,dz=0$ car $f(z)=e^{-z^2}$ est Holomorphe sur $\mathbb{C}$. 0,5

b) $I_1=\int_{AB} e^{-z^2}\,dz=\left\langle \begin{matrix} z=x \quad y=0 \\ x \text{ varie de } -R \text{ à } R\end{matrix}\right\rangle=\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx$ 0,5

$\lim_{R\to+\infty} I_1=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\langle g \text{ paire}\rangle=2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ 0,5

$I_2=\int_{BC} e^{-z^2}\,dz=\left\langle \begin{matrix} z=R+iy \\ dz=i\,dy\end{matrix}\right\rangle=\int_0^{a/2} e^{-(R+iy)^2}\,i\,dy$ 0,5

$\lim_{R\to+\infty} I_2=\int_0^{a/2}\lim_{R\to+\infty} e^{-R^2}.e^{y^2}\,e^{-2iRy}\,i\,dy=0$ 0,5

$I_3=\int_{CD} e^{-z^2}\,dz=\left\langle \begin{matrix} z=x+i\,a/2 \\ dz=dx\end{matrix}\right\rangle=\int_R^{-R} e^{-(x+i\,a/2)^2}\,dx$ 0,5

$\lim_{R\to+\infty} I_3=-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[x^2+iax-\frac{a^2}{4}\right]}\,dx=-e^{+\frac{a^2}{4}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx-i\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin ax\,dx}_{=0}\right]$ 0,5

$=\left\langle \begin{matrix} h_1(x)=e^{-x^2}\cos ax \quad \text{paire} \\ h_2(x)=e^{-x^2}\sin ax \quad \text{impaire}\end{matrix}\right\rangle=-2e^{+\frac{a^2}{4}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx$ 0,5

$I_4=\int_{DA} e^{-z^2}\,dz=\left\langle \begin{matrix} z=-R+iy \\ dz=i\,dy\end{matrix}\right\rangle=\int_{a/2}^{0} e^{-(-R+iy)^2}\,i\,dy$ 0,5

$I_4=-i\int_0^{a/2} e^{-(R^2-2Riy-y^2)}\,dy=-i\,e^{-R^2}\int_0^{a/2} e^{y^2}.e^{2iyR}\,dy \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ 0,5

$\lim_{R\to+\infty} I=0=\sqrt{\pi}-2e^{+\frac{a^2}{4}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx$ 0,5

c) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-a^2/4}$ 0,25

$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2x^2}\cos\beta x\,dx=\left\langle \begin{matrix} u=\alpha x \\ \alpha>0 \\ du=\alpha\,dx\end{matrix}\right\rangle=\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\cos\left(\beta\frac{u}{\alpha}\right)\frac{du}{\alpha}=\left\langle a=\frac{\beta}{\alpha}\right\rangle$

$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$ 0,5

Ex1. 3) Calculer: les points singularités $z_1 = \frac{1}{2}$ pôle double ; $z_2 = -3$ pôle simple. (II)

$I_1 = \oint_{C_1} f(z)\,dz = 0$ car f est Holomorphe sur $\{z \mid |z| \le \frac{1}{4}\}$ (0,5)

$z_1 = \frac{1}{2} \in \{z \mid |z| \le 1\}$

$I_2 = \oint_{C_2} f(z)\,dz = 2i\pi \,\mathrm{Res}(f, \frac{1}{2}) = 2i\pi \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left[(z-\frac{1}{2})^2 f(z)\right]'$; $\frac{1}{2} \in \{z \mid |z| \le 1\}$

$= 2i\pi \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left[\frac{1-16z}{z+3}\right]' = 2i\pi \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left[\frac{-16(z+3)-(1-16z)}{(z+3)^2}\right] = 2i\pi\,\frac{-16(\frac{1}{2}+3)-1+8}{(\frac{1}{2}+3)^2}$

$= -4 \cdot 2i\pi$ (1) $= -8i\pi$

$I_3 = \oint_{C_3} f(z)\,dz = 2i\pi\left[\mathrm{Res}(f, \frac{1}{2}) + \mathrm{Res}(f, 3)\right]$ car $z_1 = \frac{1}{2}$ et $z_2 = -3 \in \{z \mid |z| \le 4\}$

$\mathrm{Res}(f, 3) = \lim_{z\to -3} (z+3) f(z) = \lim_{z\to-3} \frac{1-16z}{(2z-1)^2} = \frac{1+48}{(-6-1)^2} = \frac{49}{49} = 1$

$I_3 = 2i\pi\left[-4+1\right] = -6i\pi$ (1,5)

4) I_j = c'est le résidus de f aux pts de singularités dans C_j (0,5)
= c'est le coefficient a_{-1} de la série de Laurent sur C_j

Ex2 $g(z) = e^{-z^2} = e^{-(x+iy)^2} = e^{-x^2+y^2}(\cos 2xy - i \sin 2xy)$

1) $\mathrm{Re}(g(z)) = e^{y^2-x^2}\cos(2xy)$ (0,5)

$\mathrm{Im}(g(z)) = -e^{y^2-x^2}\sin(2xy)$ (0,5)

$|g(z)| = e^{y^2-x^2}$ (0,5) $\quad \mathrm{Arg}(g(z)) = -2xy + 2k\pi$; $\forall k \in \mathbb{Z}$ (0,5)

2) $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) = 0$ (1)

3) $\left|e^{-x^2}\cos ax\right| \le e^{-x^2}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge

donc $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx$ converge uniformément, $\forall a \in \mathbb{R}$.

(1)

Corrigé

Analyse complexe

L_2, S_4 2019-2020 1

Ex 1 1) $f(z) = \dfrac{1-16z}{(z+3)(2z-1)^2} = \dfrac{A}{2z-1} + \dfrac{B}{(2z-1)^2} + \dfrac{C}{z+3}$.

$$C = \lim_{z\to -3} (z+3) f(z) = \lim_{z\to -3} \frac{1-16z}{(2z-1)^2} = \frac{1-16\cdot(-3)}{(-6-1)^2} = \frac{49}{49} = 1 \Rightarrow C = 1 \quad 0,5$$

$$B = \lim_{z\to \frac{1}{2}} (2z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1-16z}{z+3} = \frac{1-8}{\frac{1}{2}+3} = \frac{-7}{\frac{7}{2}} = -2 \Rightarrow B = -2 \quad 0,5$$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \frac{1}{3} = -A + B + \frac{C}{3} = -A - 2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow A = -2 \quad 0,5$$

2) Développer $f(z)$ en séries de Laurent

a) $D_1 = \{z \mid |z| < 1/2\} \Rightarrow |2z| < 1$ et $\left|\dfrac{z}{3}\right| < \dfrac{1}{6} < 1$

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n\geq 0} q^n \;;\; |q|<1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n\geq 1} n q^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)q^n \;;\; |q|<1 \quad 0,5$$

D'où

$$f(z) = \frac{-A}{1-2z} + \frac{B}{(1-2z)^2} + \frac{C}{3\left(1-\left(-\frac{z}{3}\right)\right)}$$

$$= -A \sum_{n\geq 0} (2z)^n + B \sum_{n\geq 0} (n+1)(2z)^n + \frac{C}{3}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\left[-A 2^n + B(n+1)2^n + \frac{C(-1)^n}{3^{n+1}}\right] z^n$$

0,5 0,5 0,5

b) $D_2 = \{z \mid \frac{1}{2} < |z| < 3\} \Rightarrow |2z| > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|2z|} < 1 \qquad \left|\dfrac{z}{3}\right| < 1$

$$f(z) = \frac{A}{2z\left(1-\frac{1}{2z}\right)} + \frac{B}{4z^2\left(1-\frac{1}{2z}\right)^2} + \frac{C}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}$$

$$= \frac{A}{2z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2z}\right)^n + \frac{B}{4z^2}\sum_{n\geq 0}(n+1)\left(\frac{1}{2z}\right)^n + \frac{C}{3}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{z}{3}\right)^n$$

0,5 0,5 0,5

c) $D_3 = \{z \mid |z| > 3\} \qquad \left|\dfrac{3}{z}\right| < 1 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{2z}\right| < \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} < 1$

$$f(z) = \frac{A}{2z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2z}\right)^n + \frac{B}{4z^2}\sum_{n\geq 0}(n+1)\left(\frac{1}{2z}\right)^n + \sum_{n\geq 0}\frac{C(-1)^n}{z}\left(\frac{3}{z}\right)^n$$

0,5 0,5 0,5