Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 4.
Module : *Analyse 4* - Examen Final.
Lundi 12/10/2020 - Durée : 01h30.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (10pts)

1. Montrer que $\forall\, a \neq 0,\ b \neq 0$ on a $\dfrac{|ab|}{a^2+b^2} \leq \dfrac{1}{2}$.
2. Soit $\beta > 0$ un paramètre réel. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\beta}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Pour quelles valeurs de β la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
3. Montrer que pour toute valeur de $\beta > 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et calculer leurs valeurs.
4. Trouver enfin les valeurs de β pour lesquelles f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2 : (10pts) Soit $f(x,y)$ une fonction de classe au moins C^2 vérifiant l'équation
$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 6\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

1. On pose (S) $\begin{cases} u = ax + y \\ v = bx + y \end{cases}$, avec a, b deux constantes réelles. A quelle condition sur a et b, le système (S) définit-il un changement de variables dans $\mathbb{R}^2$?
2. Avec la condition trouvée précédemment on pose $f(x,y) = g(u,v)$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ à l'aide de $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$.
3. Montrer alors que l'équation (E) se transforme en une équation (pour g) du type
$$(\widetilde{\mathrm{E}}) \qquad \alpha\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \beta\,\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \gamma\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0.$$
4. Montrer qu'on peut choisir a et b de façon à ce que $\alpha = \gamma = 0$. Calculer dans ce cas la valeur de β.
5. Résoudre enfin l'équation $(\widetilde{\mathrm{E}})$, puis donner la solution générale de (E).

2ème année de Licence de Mathématiques - 2019/2020.

Module : "Analyse 4" - Examen Final - Corrigé.

Exercice 1 : (10pts)

1°/ D'après les identités remarquables on a :

$$(|a|-|b|)^2 \geq 0, \quad \forall a,b \in \mathbb{R},$$

d'où $|a|^2+|b|^2-2|a|\cdot|b| \geq 0 \Leftrightarrow |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

Comme $a \neq 0$ et $b \neq 0$ par hypothèse alors $a^2+b^2 \neq 0$ — 2pts

et de là $\frac{|ab|}{a^2+b^2} \leq 1/2$.

2°/ Soit $\beta > 0$. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\beta}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

D'après la première question on a si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{|xy|^\beta}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|xy|^{\beta-1}.$$

Deux cas se présentent.

1er cas : $\boxed{\beta > 1}$ Dans ce cas $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

car $0 \leq f(x,y) \leq \underbrace{\frac{1}{2}|xy|^{\beta-1}}_{\downarrow 0}$ car $\beta > 1$. La fonction f — 3pts

est alors continue en $(0,0)$.

2ème cas : $\boxed{0 < \beta \leq 1}$ La majoration précédente ne donne pas de réponse. Prenons la suite $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

Alors $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1/n^{2\beta}}{2/n^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2(\beta-1)}} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ 1/2 & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$

Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$, et f est non-continue dans ce cas.

[Conclusion : f est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\beta > 1$]

3°/ Par définition on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$

et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$ 2pts

Pour $h\neq 0$, $f(h,0) = 0 = f(0,h)$, donc les deux rapports sont nuls. De là $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et ce $\forall \beta > 0$.

4°/ L'existence de la différentielle en $(0,0)$ implique que

$$df_{(0,0)}(h_1,h_2) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Donc la seule possibilité pour la différentielle est $df_{(0,0)} \equiv 0$.

Voyons dans quel(s) cas ceci est possible. On doit étudier $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - df_{(0,0)}(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$?

Comme $df_{(0,0)}$ devrait être nulle, alors : 3pts

$$\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{|h_1 h_2|^\beta}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} \leq \frac{1}{2^{3/2}} |h_1 h_2|^{\beta - 3/2}$$

1er cas : si $\boxed{\beta > 3/2}$ alors on aura bien

$\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} |h_1 h_2|^{\beta-3/2} = 0$ et donc f est différentiable en $(0,0)$ avec $df_{(0,0)} \equiv 0$.

2ème cas : si $\boxed{0<\beta \leq 3/2}$. On utilise la même suite $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$$\frac{f(1/n, 1/n) - f(0,0)}{\sqrt{2/n^2}} = \frac{1}{2^{3/2}} \cdot n^{3-2\beta} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 3/2 \\ 1/2^{3/2} & \text{si } \beta = 3/2 \end{cases}$$

Conclusion : f est différentiable en $(0,0)$ si et ssi $\beta > 3/2$

Exercice 2 : (10pts) (E) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

1°/ (S) : $\begin{cases} u = ax+y \\ v = bx+y \end{cases}$ avec $a,b \in \mathbb{R}$.

La transformation (S) est C^∞ (évident). Pour que ça soit un changement de variable, il faut et il suffit qu'elle soit inversible et d'inverse au moins C^1. Or elle est linéaire

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; donc l'inversibilité est l'inversibilité de la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Ceci aura lieu si $\det\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ càd $a-b \neq 0 \iff \boxed{a \neq b}$. On peut aussi parler de Jacobienne $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ inversible si $a \neq b$. L'inverse est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a-b}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est de classe C^∞. 2pts

2°/ Supposons maintenant que $a \neq b$. On aura

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = a\frac{\partial g}{\partial u} + b\frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$$ 2pts

3°/ Calculons les dérivées secondes de f.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(a\frac{\partial g}{\partial u} + b\frac{\partial g}{\partial v}\right)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\left(a\frac{\partial g}{\partial u} + b\frac{\partial g}{\partial v}\right)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= a\left(a\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + b\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\right) + b\left(a\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + b\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

Alors $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2ab \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + b^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}}$

On procède de la même façon et on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (a+b) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + b \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}}$$

On remplace dans l'équation (E) :

$$\boxed{(a^2+6a+1) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2ab+6(a+b)+2) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (b^2+6b+1) \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0 \quad (\tilde{E})}$$

C'est ce qu'il fallait obtenir en posant

$$\boxed{\alpha = a^2+6a+1 \ ; \ \gamma = b^2+6b+1 \quad \text{et } \beta = 2(ab+3a+3b+1)}$$

4°/ Pour avoir $\alpha = \gamma = 0$, il faut résoudre l'équation $\lambda^2+6\lambda+1=0$
$\Delta' = 3^2-1 = 8 = (2\sqrt{2})^2$, alors $\lambda = -3 \pm 2\sqrt{2}$. On a deux choix pour a, b : $\begin{cases} a=-3-2\sqrt{2} \\ b=-3+2\sqrt{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=-3+2\sqrt{2} \\ b=-3-2\sqrt{2} \end{cases}$

(Il est clair que $a \neq b$ pour ne pas contredire la 1ère question).

Dans ce cas : $\boxed{\beta = 2[1-18+1] = -32}$

$$\boxed{(\tilde{E}) : (-32) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0}$$

2pts

2pts

4

5°/ L'équation $(\tilde{E})$ peut s'écrire $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$. Ceci implique que : $\frac{\partial g}{\partial v} = A_1(v)$ (une fonction de v seulement)

et donc $g(u,v) = \int A_1(v) dv + B(u)$

$$\boxed{g(u,v) = A(v) + B(u)}$$

avec A, B deux fonctions C^2 d'une variable.

En définitive la solution générale de (E) s'écrit :

$$\boxed{f(x,y) = A\left((-3+2\sqrt{2})x + y\right) + B\left((-3-2\sqrt{2})x + y\right)}$$

(Avec le deuxième choix de (a,b), on aura des formules similaires).

2pts