Université de Tlemcen
Faculté des sciences
L2 Mathématiques

le 13/10/2020

Epreuve du module "Algèbre 4"

durée : 2 heures

Exercice n° 1

On considère $\mathbb{R}^4$ l'espace Euclidien muni du produit scalaire canonique, $F=[v_1, v_2]$ où $v_1=(1,0,0,-1)$; $v_2=(-1,-1,1,1)$

a/ Déterminer une base orthonormée de F.

b/ Déterminer $F^\perp$

Exercice n° 2

Soit E un espace vectoriel muni d'une forme quadratique q, s sa forme polaire, $A\subset E$, $B\subset E$. Montrer que :

$$(A\cup B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp$$

Exercice n° 3

Soit $q:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par :

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

1°/ Déterminer $M(q)_{e_i}$; $rg(q)$ (en utilisant $M(q)$) ; $N(q)$, (e_i) étant la base cano. de $\mathbb{R}^3$

2°/ Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q et $Sgn(q)$

3°/ Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormée pour q (si elle existe).

Exercice n° 4

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien, q une forme quadratique sur E, on note s sa forme polaire.
Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme f_s de E tel que

$$< x, f_s(y) > = s(x,y) \quad \forall x,y \in E$$

Ex1 : 5pts ; Ex2 : 3pts ; Ex3 : 8pts ; Ex4 : 4pts

Bon Courage

Espérons que cette pandémie converge vers 0

Université de Tlemcen

Faculté des sciences

Corrigé de l'épreuve du module "Algèbre 4"

exercice n°1

Soit $\mathbb{R}^4$ l'espace euclidien muni du produit scalaire canonique, F le ssev de $\mathbb{R}^4$ engendré par v_1, v_2 où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a/ Déterminons une base orthonormée de F, pour cela déterminons d'abord une base orthogonale de F en utilisant le procédé de SCHMIDT, avant il faut vérifier ou montrer que $\{v_1, v_2\}$ est libre.

On peut extraire de la matrice formée par $v_1\, v_2$.

$$\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \overset{\text{théorème}}{\Longrightarrow} \{v_1, v_2\} \text{ est libre.}$$

Posons $\varepsilon_1 = v_1$

$$\varepsilon_2 = v_2 + \lambda \varepsilon_1 \text{ avec } \lambda = -\frac{\langle v_2, \varepsilon_1 \rangle}{\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle} = -\frac{\left\langle \begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right\rangle} = -\frac{-2}{2}$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = v_2 + \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est une base orthogonale de F

$$\Rightarrow \left\{ e_1 = \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est une base}$$

orthonormée de F

2/ Déterminons $F^\perp$

On a montré que $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ est une base orthogonale de F, on peut l'utiliser.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in F^\perp \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}, \mathcal{E}_1 \right\rangle = 0 \text{ et } \left\langle \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}, \mathcal{E}_2 \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \right\rangle = 0 \text{ et } \left\langle \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow y_1 - y_4 = 0 \text{ et } -y_2 + y_3 = 0$$

$$\Rightarrow F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \Big/ \begin{matrix} y_1 - y_4 = 0 \\ -y_2 + y_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

en résolvant le système on trouve que

$$F^\perp = [W_1, W_2] \text{ avec } W_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \ W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 2

Soit (E, q) un espace vectoriel muni d'une forme quadratique q, s la forme polaire de q, $A \subset E$, $B \subset E$, montrons que $(A \cup B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp$

$x \in (A \cup B)^\perp \Rightarrow s(x, y) = 0 \quad \forall y \in A \cup B$ (1)

d'autre part $t \in A \Rightarrow t \in A \cup B \overset{(1)}{\Rightarrow} s(x, t) = 0$.

$\Rightarrow s(x, t) = 0 \ \forall t \in A \Rightarrow x \in A^\perp$ (2)

De même, $b \in B \Rightarrow b \in A \cup B \overset{(1)}{\Rightarrow} s(x, b) = 0$

$\Rightarrow s(x, b) = 0 \ \forall b \in B \Rightarrow x \in B^\perp$ (3)

(2) et (3) $\Rightarrow x \in A^\perp \cap B^\perp$ conclusion : $(A \cup B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp$

exercice n°3

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

1°/ $M(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Det} M(q)_{e_i} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2-2 = -4 \neq 0$

$\Rightarrow rg(q) = 3 \Rightarrow N(q) = \{0\}$.

2°/ $q(x) = x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + 2x_2^2 - 2x_3^2$

$= (x_1+x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2$.

$= (x_1+x_2+x_3)^2 - (x_2^2+x_3^2+2x_2x_3) + 2x_2^2 - 2x_3^2$

$= (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 - 3x_3^2$

$= (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2-x_3)^2 - 4x_3^2$. (1)

Posons $x_1' = x_1 + x_2 + x_3$, $x_2' = x_2 - x_3$, $x_3' = x_3$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' - 2x_3' \\ x_2 = x_2' + x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

conclusion : $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q

D'après (1) $p=2$ et $r=3$ et même dans la première question on a trouvé $r = rg(q) = 3 \Rightarrow sgn(q) = (2,1)$

3°/ Si une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ existe alors $p=3$ or $p=2$ (contradiction) donc la base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (pour q) n'existe pas

Exercice n° 4

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien, q une forme quadratique sur E, s la forme polaire de q.

Montrons qu'il existe un et un seul endomorphisme f_s de E tel que $<x, f_s(y)> = s(x,y)$ $\forall x, y \in E$ (1)

(1) Unicité

Supposons que f_s tel que (1) existe

ie: $<x, f_s(y)> = s(x,y)$ $\forall x, y \in E$.

Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de E, (elle existe car $(E, <,>)$ est euclidien.

Posons $S = M(s)_{e_i}$; $A = M(f_s)_{e_i}$; $X = M(x)_{e_i}$; $Y = M(y)_{e_i}$

$$(1) \underset{\text{Ch. E. Euclidiens}}{\overset{P_2 (5)}{\Longleftrightarrow}} {}^tX M(<,>)_{e_i} M(f_s(y)) = {}^tX M(s)_{e_i} Y, \ \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$\underset{M(<,>)_{e_i} = I}{\overset{\{e_i\} \text{ orthon.}}{\Longleftrightarrow}} {}^tX I A Y = {}^tX S Y \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

$$\overset{\text{ExTD}}{\Longleftrightarrow} A = S,$$ ce qui montre l'unicité de f_s tel que (1)

(2) Existence

Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de E et posons $S = M(s)_{e_i}$, considérons un endo f_s de E tel que $M(f_s)_{e_i} = S$ et montrons que f_s vérifie (1) ; $<x, f_s(y)> = {}^tX I S Y = {}^tX S Y = s(x,y)$

$\Longrightarrow$ $<x, f_s(y)> = s(x,y)$ $\forall x, y \in E$ c.q.f.d.