Université Aboubekr Belkaid de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
A.U:.19
L2 MATH Topologie

Série 2 Continuité

Exercice 1

Soient f et g deux applications continues entre les espaces métriques (E, d) et (F, δ)

Montrer que $A = \{x \in E,\ f(x) = g(x)\}$est fermé.

Exercice 2

Soient f et g deux applications continues de l' espace métrique (E, d) vers $\mathbb{R}$

Montrer que l'ensemble $A = \{x \in E,\ f(x) \leq g(x)\}$ est fermé. .

En déduire que si $f \leq g$ sur une partie dense de E alors $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in E$

Exercice 3

Soient f et g deux applications continues entre les espaces métriques (E, d) et (F, δ)

Montrer que si $f = g$ sur une partie dense de E alors $f(x) = g(x)$ $\forall x \in E$

Exercice 4

Soit f une application uniformément continue de (E, d) vers (F, δ)

1) Montrer que f transforme toute suite de Cauchy de E en une suite de Cauchy dans F

2) Soit $f : (]-a, a[\,, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ la fonction réelle donnée par: $f(x) = \frac{x}{a-|x|}$

i) Vérifier que la suite $\left(x_n = a - \frac{1}{n}\right)_n$est de Cauchy.

ii) Montrer que $(f(x_n))_n$n'est pas de Cauchy.

iii) Montrer que f n'est pas uniformément continue sur $]-a, a[$

iv) En déduire que 1) est généralement fausse pour une fonction quelconque.

Exercice 5

a) Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes

$f, g, h :\quad f(x) = \cos 3x \quad, g(x) = \cos x^2 \ \ h(x) = \sin \frac{2}{x}$

b) Montrer que les applications de $(\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}^2, d_2)$ sont des isométries

i) $f(x, y) = (x, y) + (x_0, y_0)$: translation de vecteur .(x_0, y_0)

ii) $f(x,y) = (-x,-y)$ symétrie par rapport à l'origine

Exercice 6:

Soit $f : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ une fonction uniformément continue.

Montrer qu'il existe deux constantes strictement positives telles que:

$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq a|x| + b$

La réciproque est -elle vraie?

Exercice 7

Etudier l'existence du point fixe pour les applications suivantes

$f, g, h : (\mathbb{R}, |.|) \to (\mathbb{R}, |.|)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$,,$g(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x$, $h(x) = \arg shx$

ces applications sont elles contractantes?

Exercice 8

Soit (E, d) un espace métrique .

Soit φ une application de $\mathbb{R}^+$dans $\mathbb{R}^+$strictement croissante nulle en zéro et sous additive et continue,

a) Montrer que $d' = \varphi \circ d$ est également une distance topologiquement équivalente à d

b) Montrer que $d_1(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ et $d_2(x,y) = \ln(|x-y|+1)$ définissent sur $\mathbb{R}$ des distances topologiquement équivalente à la distance usuelle.

c) La distance d_2 est- elle métriquement équivalente à la distance usuelle

Exercice 9

a) Montrer que la distance $d(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$ sur $\mathbb{R}$ est également une distance topologiquement équivalente à la distance usuelle

b) Montrer que $\mathbb{R}$ muni de cette distance n'est pas complet.(utiliser la suite $(x_n = n)_{n\in\mathbb{N}}$).conclure

Exercice 10

On muni$\mathbb{N}^*$de la distance usuelle d et on pose $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$ $d'(x,y) = \frac{|x)y|}{xy}$

1) Vérifier que d' est une distance et montrer que l'identité id: $(\mathbb{N}^*, d') \to (\mathbb{N}^*, d)$ est homéomorphisme .conclure!

2) Montrer que $\mathbb{N}^*$muni de cette distance n'est pas complet.(utiliser la suite $(x_n = n)_{n\in\mathbb{N}^{*3}}$).conclure

3) Montrer que $\mathbb{N}^*$muni de la distance d est complet ,en déduire que d et d' ne sont pas métriquement équivalentes

Exercice 11

On muni $\mathbb{R}$ des distances d et d' définies par: $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ et $d'(x,y) = |e^x - e^y|$

a) Montrer que $f : (\mathbb{R}, d) \to \left(\left]-\frac{\pi}{2}-, \frac{\pi}{2}\right[, |.|\right)$ telle que $f(x) = \arctan x$ est une isométrie,en déduire que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

b) Montrer que $f : (\mathbb{R}, d) \to (]0, +\infty[\, , |.|)$ telle que $f(x) = e^x$ est une isométrie,en déduire que $(\mathbb{R}, d')$ n'est pas complet.