Université Aboubekr Belkaid de Tlemcen A.U:.
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L2 MATH Topologie

Série 1: Espaces Métriques . Espaces Topologiques

Exercice 1

Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que les applications suivantes définissent des distances:

$e_1 : (x,y) \longmapsto e_1(x,y) = \min(1, d(x,y))$
$e_2 : (x,y) \longmapsto e_2(x,y) = \ln(1 + d(x,y))$
$e_3 : (x,y) \longmapsto e_3(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+2d(x,y)}$

Exercice 2

Lesquelles des applications suivantes définissent des distances dans $\mathbb{R}$?

$d_1(x,y) = \sqrt{|x^2 - y^2|}$, $d_2(x,y) = \frac{\ln|1+x| - \ln|1+y|}{1+|x-y|}$, $d_3(x,y) = \left|\arctan \frac{x-y}{1+xy}\right|$

$d_4(x,y) = (x-y)^3$ $\quad d_5(x,y) = \left|x^3 - y^3\right|$

Exercice 3

Soit (E,d) un espace métrique,
Etablir que: $\forall x,y,z \in E \ | \ d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$

Exercice 4

Soit E un ensemble et $e : E \times E \longmapsto \mathbb{R}$ vérifiant

a) $\forall x,y \in E \quad e(x,y) = e(y,x) \geq 0,$
b) $\forall x \in E \quad e(x,x) = 0$ et
c) $\forall x,y,z \in E \quad e(x,y) \leq e(x,z) + e(y,z)$

i) Montrer que la relation R définie sur E par $xRy \Longleftrightarrow e(x,y) = 0$ est une relation d'équivalence

ii) Montrer que e induit sur l'ensemble des classes d'équivalence E/R.une distance

Exercice 5

Soit S l'ensemble des suites numériques réelles ou complexes, si $x = (x_n)_n$ $y = (y_n)_n$on pose

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n \ |x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|} \text{ où } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ est une série positive convergente.} \div$$

Montrer que d définie une distance sur S.

Exercice 6

Soit (E,d) un espace métrique et f une application injective de E vers E .

1) Montrer que l'application $\sigma : E\times E \longmapsto \mathbb{R}$:$\sigma(x,y) = d(f(x), f(y))$ est également une distance sur E.

2)Soit $E = [0,1]$ avec $d(x,y) = |x-y|$ et f $E \longmapsto E$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x } = 0 \\ 0 & si\ x = 1 \\ x & si\ \ 0 \prec x \prec 1 \end{cases}$$

Etudier la convergence de la suite $\left(x_n = \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$dans (E,d) et dans (E,σ) ...

3) a) Soit φ une application de $\mathbb{R}^+$dans $\mathbb{R}^+$strictement croissante nulle en zéro et sous additive ,montrer que $\varphi \circ d$ est également une distance .

b)Montrer que l'on peut prendre par exemple $\varphi(x) = \sqrt{x}$ $\varphi(x) = \ln(x+1)$

Exercice 7

Soit E $= C([a,b], \mathbb{R})$l'ensemble des fonctions continues définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Pour $f, g \in E$ on définit les applications suivantes:

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \qquad d_2(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\ dx\right)^{1/2}$$

$d_\infty(f,g) = \max_{a\leq x\leq b} |f(x) - g(x)|$

Montrer que ces applications sont des distances sur E.

Exercice 8

Soient (E_1, d_1) (E_2, d_2) deux espaces métriques. Montrer que les applications suivantes définissent bien des distances sur l'ensemble $E_1 \times E_2$:

$d := \sup(d_1, d_2)$ $\qquad d' = d_1 + d_2$ $\qquad d" := \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$,

Exercice 9

Soit X=$]0, +\infty[$,pour $x, y \in X$,on note $\delta(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$

1) Démontrer que δest une distance.

2) Déterminer $B(1,1)$pour cette distance

3) La partie $A =]0,1]$est elle bornée pour cette distance?est elle fermée?

4) Déterminer les boules ouvertes pour cette distance

Exercice 10

Soient A,B deux parties d'un espace métrique (E,d).

a)Montrer que

1) $A \subset B \Longrightarrow int(A) \subset int(B)$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$

2) int$(A\cap B) = in(A) \cap in(B)$ et que $in(A) \cup in(B) \subset in(A\cup B)$

3)$\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,$\overline{A\cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

4) $Fr(in(A)) \subset Fr(A), Fr(A\cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$ avec égalité si $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:
1)$A \subset Fr\left(A\right)$
2)$in\left(A\right)=\varnothing$
3)Le complémentaire de A dans E est dense dans E.
c)
1)$Fr\left(A\right)=Fr\left(A^{c}\right)$
2) A fermée $\Leftrightarrow$ $Fr\left(A\right)\subset A$
3)A ouverte$\Leftrightarrow$ $Fr\left(A\right)\cap A=\varnothing$
4)A fermée $\Leftrightarrow$ $Fr\left(Fr\left(A\right)\right)=Fr\left(A\right)$

Exercice 11

Déterminer dans $\mathbb{R}^{n}$muni de la distance euclidienne l'intérieur, l'adhérence et la frontière des ensembles:

1) Dans $\mathbb{R}$: : $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $A=\left\{\left(x_{n}=(-1)^{n}+\frac{2}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(y_{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}},\left(z_{n}=\arctan n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$

2) Dans $\mathbb{R}^{2}$ :: $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2}x^{2}+y^{2}\prec 1 \ \ x\succ 0,y\succ 0\right\}$ $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2}x^{2}+y^{2}\leq 2x \ \ x\geq 0,y\geq 0\right\}$
$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2} \quad 1\prec x^{2}+y^{2}\leq 4\right\}$ $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2} \quad |x|+|y|\leq 1\right\}$
$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2} \ \ x^{2}-y^{2}\prec 1 \ \ x\succ 0\right\}$
$A\cup B$, $A\cap B, C\cup D$ et $C\cap D$.

3) Dans $\mathbb{R}^{3}$: $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3} \ \ x^{2}+y^{2}=1 \ \ 0\leq z\leq h\right\}$ $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3} \ \ x^{2}+y^{2}+z^{2}\leq 2x \ \ x\geq 0,y\right.$
$C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3} \ \ x^{2}+y^{2}=2x \text{ ou } x^{2}+y^{2}\leq 4\right\}$ $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{2} \ \ x+y+z=1\right\}$
$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3} \ \ x^{2}+y^{2}=z^{2} \ \ z\succ 0\right\}$

Exercice 12

Soient A,B deux parties d'un espace métrique (E,d) ..Montrer que si A est ouverte et $A\cap B,=\varnothing$ alors $A\cap\overline{B},=\varnothing$

Exercice 13

Soit $U_{1},\ldots,U_{n}$ un nombre fini d'ouverts denses d'un espace métrique (E,d) .Démontrer que $\cap_{i=1}^{n}U_{i}$ est un ouvert dense .

Exercice 14

Soit (E,d) .un espace métrique .Montrer que:
1) l'ensemble vide est bornée
2) toute boule de E est un ensemble borné
3)tout singleton de E est borné
4) $\delta\left(B\left(a,r\right)\right)\leq 2r$

Exercice 15

Soient A,B deux parties non vides d'un espace métrique (E,d) .Montrer que:
1) $A\subset B\Longrightarrow\delta\left(A\right)\leq\delta\left(B\right)$
2) $\delta\left(A\right)=0\Leftrightarrow A=\{a\}$
3) A et B borné$\Longleftrightarrow$ $A\cup B$ borné
4) toute partie finie de E est bornée

5)$\delta\left(\overline{A}\right)=\delta\left(A\right)$

Exercice 16

Montrer que toute suite convergente d'un espace métrique (E,d) est bornée.

Exercice 17

Soit l'application δ pour $x,y\in Q^{*}$,on note $\delta\left(x,y\right)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad \text{x} = \text{y}\\ \left|\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{1}{y}\right| & \text{si} \quad \text{x} \neq y\end{cases}$

1) Démontrer que δ est une distance sur Q^{*}

2) Les suites $(x_n)_n$et $(y_n)_n$définies par $x_n=\frac{1}{n}$ et $y_n=n$ sont-elles de Cauchy dans (Q^{*},d)?

3)En déduire que (Q^{*},d) n'est pas complet

Exercice 18

Soit l'application δ pour $x,y\in\mathbb{N}^{*}$,on note $\delta\left(x,y\right)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x=y\\ 1+\frac{1}{x}\ +\frac{1}{y} & \text{si} \quad x\neq y\end{cases}$

1) Démontrer que δ est une distance sur $\mathbb{N}^{*}$

2) Montrer que si $(x_n)_n$est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{N}^{*},d)$ alors elle est stationnaire.

3) En déduire que $(\mathbb{N}^{*},d)$ est complet

Exercice 19

On munit l'ensemble E $=C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$l de la distance d_{∞} et on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^{*}}$définie par:

$$f_n\left(x\right)=\begin{cases}(3n-2)\ x & \text{si} \quad 0\leq x\leq\frac{1}{3n}\\ 1-\frac{2}{3n} & \text{si} \quad \frac{1}{3n}\prec x\leq\frac{2}{3n}\\ 1-x & \text{si} \quad \frac{2}{3n}\prec x\leq 1\end{cases}$$

Montrer que E muni de la distance d_1n'estpas complet.

Exercice 20

On munit l'ensemble E $=C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ muni de la distance d_1 et on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^{*}}$définie par:

$$f_n\left(x\right)=\begin{cases}2n^2\ x & \text{si } 0\leq x\leq\frac{1}{2n^2}\\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2n^2}\prec x\leq 1\end{cases}$$

Montrer que E muni de la distance d_1n'est pas complet.

Exercice 21

On munit l'ensemble E $=C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ de la distance d_1 et on considère les suites $(f_n)_n,(g_n)_n$définies par

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \left(x - \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}} & si \;\; \frac{1}{3} \prec x \leq 1 \end{cases}$$

1) Vérifier que ces deux suites sont de Cauchy.

2) En déduire que $(C([0,1], \mathbb{R}), d_1)$ n'est pas complet.

Exercice 22

On munit l'ensemble E $= C([-1,1], \mathbb{R})$ de la distance d_1 et on considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & \text{si} \quad -\frac{1}{n} \prec x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \prec x \leq 1 \end{cases} \quad \text{et} \;\; f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} & -1 \leq x \prec 0 \\ 0 & \text{si} & x=0 \\ 1 & \text{si} & 0 \prec x \leq 1 \end{cases}$$

1) Vérifier que $f_n \in$ E et $\forall n, m \in \mathbb{N}^* \;\; d_1(f_n, f_m) \leq \sup\left(\frac{2}{n}, \frac{2}{m}\right)$

en déduire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy...

2) Montrer que:

$\forall \alpha \in \left]0,1\right[\; \lim_{n \to +\infty} \int_{-1}^{\alpha} |f_n(t) + 1| \, dt = 0 \;\; et \;\; \lim_{n \to +\infty} \int_{-1}^{\alpha} |f_n(t) - 11| \, dt =$ 0

3) En déduire que E muni de la distance d_1n'est pas complet.

4) Etudier la convergence de suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans E muni de la distance d_2.ou d_∞ ;.Conclure!

Exercice 23

Soit (E, d).un espace métrique .et $(x_n)_n$et une suite dans E .

Montrer que si $\sum_{n \geq 1} d(x_n, x_{n+1}) \prec +\infty$ alors $(x_n)_n$ est de Cauchy.

La réciproque est-elle vraie?

Exercice 24

Montrer que tout espace métrique discret est complet.

Exercice 25

Montrer que l'espace métrique E $= C([a,b], \mathbb{R})$ muni de la distance fondamentale d_∞ est complet.

Exercice 26

Soit (E, d).un espace métrique .et $(x_n)_n$et une suite dans E .

Montrer que a est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$si et seulement si elle est limite d'une sous-suite extraite de $(x_n)_n$