Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°5

Exercice 1 : Préciser, pour chacune des intégrales suivantes, pourquoi elle est impropre ; puis étudier sa convergence.

$$\int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t}} \quad , \quad \int_0^\pi \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\, dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} \quad , \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\, dx$$

Exercice 2 : Étudier, suivant les valeurs des paramètres, la convergence de chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\, dt \quad , \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha\left(1+x^\beta\right)}$$

Exercice 3 : On se propose de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\; dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\; dx$$

1. Montrer que I et J sont convergentes.
2. A l'aide d'un changement de variable simple, montrer que $I = J$.
3. En considérant $I + J$, calculer la valeur commune.

Exercice 4 : Soit $0 < a < b$. On veut évaluer l'intégrale impropre suivante :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\, dt$$

1. Montrer que K est convergente.
2. Fixons $0 < x < y$. Montrer qu'on a
$$\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\, dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$
3. En utilisant la décroissance de la fonction $t \mapsto e^{-t}$, donner un encadrement de $\displaystyle\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\, dt$ puis déduire la valeur de K.

Exercice 5 : Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. On suppose que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(x)\, dx$ sont convergentes. Montrer alors de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$2^{ème}$ année Mathématiques – Semestre 3 – 2019/2020.

Module : "Analyse III" – Série de T.D. N°5 – Corrigé !

Exercice 1 : (*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t}}$, notons $f(t) = \dfrac{1}{t\sqrt{1-t}}$, f est localement $(f \geq 0)$, intégrable dans $]0,1[$. Aussi $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ <}} f(t) = +\infty$

Donc cette intégrale est impropre en 0 et en 1. Il est facile de voir que : $\lim\limits_{t\to 0^+} t\, f(t) = 1$ donc $f(t) \overset{V(0)}{\sim} \frac{1}{t}$, d'où la divergence en 0.

$\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ <}} \sqrt{1-t}\, f(t) = 1$ " $f(t) \overset{V(1)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$, " la convergence en 1.

Ainsi puisqu'on peut écrire : $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \underbrace{\int_0^{1/2} f(t)\,dt}_{div} + \underbrace{\int_{1/2}^1 f(t)dt}_{conv}$, alors l'intégrale proposée diverge.

(*) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(1/x)\,dx$, notons $g(x) = \sin^2(1/x) \geq 0$, loc. int. dans $]0,\pi]$. Elle est impropre en 0 car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ n'existe pas. Faisons le changement de variable $x = 1/t$. Alors $\displaystyle\int_0^{\pi} g(x)dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$ et comme $\forall t \geq \pi$ $0 \leq \dfrac{\sin^2(t)}{t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$ avec $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ qui converge, alors notre intégrale converge.

(*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}}$, notons $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{e^t-1}} \geq 0$, loc. int. dans $]0,+\infty[$.

Comme $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ >}} h(t) = +\infty$, elle est impropre en 0, à l'infini aussi naturellement.

On a $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2}\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) \underset{\substack{t\to 0\\ >}}{\longrightarrow} 0$, d'où $h(t) \overset{V(0)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ d'où la convergence en 0. A l'infini on a $\lim\limits_{t\to +\infty} e^{t/2} h(t) = 1$ càd $h(t) \overset{V(\infty)}{\sim} e^{-t/2}$

Là il y a convergence aussi. Donc l'intégrale converge.

(f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,dx$, notons $u(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \geqslant 0$, loc. int dans $]1,+\infty[$. $\lim\limits_{x \to 1^>} u(x) = +\infty$, donc elle est impropre en 1 et bien sûr à l'∞. On a $\ln x = (x-1) + (x-1)\,\varepsilon(x)$ $\quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 1^>]{} 0$

d'où $\sqrt{\ln x} = \sqrt{x-1}\,\left(1+\varepsilon(x)\right)^{1/2}$ et $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \dfrac{(1+\varepsilon(x))^{1/2}}{\sqrt{x}}$

càd $\lim\limits_{x \to 1^>} \sqrt{x-1}\, u(x) = 1$ càd $u(x) \overset{V(1)}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ d'où la convergence en 1.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$, $\forall \alpha, \beta > 0$. Ceci nous donne

$u(x) = \dfrac{(\ln x)^{1/2}}{x^{3/2}(1-1/x)} \implies \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}-\beta}\, u(x) = 0$ si $0<\beta<3/2$.

càd pour $x > A$, $u(x) \leq \dfrac{M}{x^{\frac{3}{2}-\beta}}$, il suffit de choisir β tq $\frac{3}{2}-\beta > 1$ càd $\beta < 1/2$. Ceci est possible, donc l'intégrale converge.

Exercice 2 : $\ast$ $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt}_{I_2}$

. Il facile de voir que $t - \sin t \overset{V(0)}{\sim} \dfrac{t^3}{6}$, d'où

$\dfrac{t-\sin t}{t^\alpha} \overset{V(0)}{\sim} \dfrac{1}{6\,t^{\alpha-3}}$, ceci nous assure la convergence de I_1 ssi $\boxed{\alpha - 3 < 1}$

. Maintenant $\dfrac{t-\sin t}{t^\alpha} = \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1 - \dfrac{\sin t}{t}\right) \overset{V(\infty)}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$, d'où la convergence de I_2 ssi $\boxed{\alpha - 1 > 1}$. Ainsi I converge

ssi $\boxed{2 < \alpha < 4}$

* $J=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt = \underbrace{\int_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}dt}_{J_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt}_{J_2}$.

· Pour J_1, on a $e^{-t}t^{\alpha-1} \underset{V(0)}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$, donc converge ssi $\boxed{1-\alpha<1}$

· Pour J_2, on sait que $e^{-t/2}t^{\alpha-1}\le M$, $\forall t\ge 1$. Donc $e^{-t}t^{\alpha-1}\le M.e^{-t/2}$ d'où la convergence de J_2, $\forall \alpha$.

Ainsi J converge ssi $\boxed{\alpha>0}$.

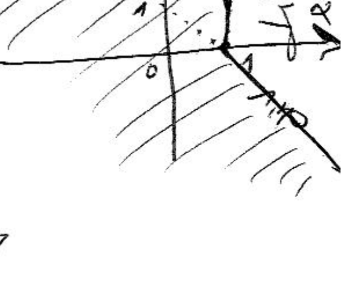
* $K=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}$, posons $f(x)=\frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}\geq 0$, sur $]0,+\infty[$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}}_{K_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}}_{K_2}$$

Étude de K_1: · Si $\boxed{\beta\geq 0}$, $f(x)\underset{V(0)}{\sim}\frac{1}{x^\alpha}$ donc cvgce ssi $\boxed{\alpha<1}$

· Si $\boxed{\beta<0}$, $f(x)\underset{V(0)}{\sim}\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$, " " ssi $\boxed{\alpha+\beta<1}$

Ainsi K_1 converge ssi (α,β) est dans le domaine hachuré

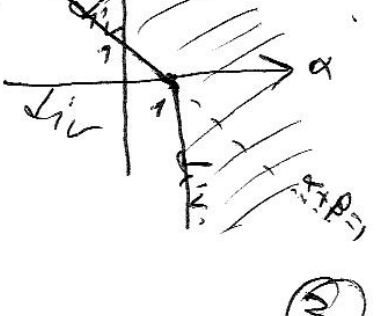


Étude de K_2: · Si $\boxed{\beta\geq 0}$, $f(x)\underset{V(\infty)}{\sim}\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$,

donc cvgce ssi $\boxed{\alpha+\beta>1}$

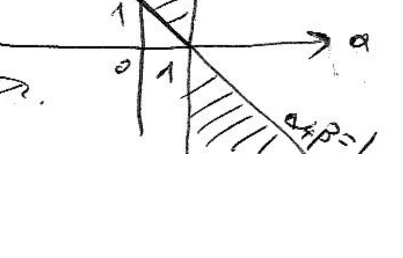
· Si $\boxed{\beta<0}$, $f(x)\underset{V(\infty)}{\sim}\frac{1}{x^\alpha}$, cvgce ssi $\boxed{\alpha>1}$.

K_2 converge ssi (α,β) est dans le domaine hachuré



En définitive K converge ssi (α,β) est dans le domaine:

$\boxed{(\alpha-1)(\alpha-1+\beta)<0}$ →



Exercice 3 : $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$, $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx$.

1°/ Convergence de I et J : * I est impropre en 0 seulement et $\ln(\sin x) = \ln(x) + \underbrace{\ln(1+\varepsilon_1(x))}_{\text{prolongeable en } 0}$.

donc I converge car $\int_0^{\pi/2} \ln(x)\,dx$ converge.

* J est impropre en $\pi/2$ seulement ; $\ln(\cos x) = \ln(\frac{\pi}{2}-x) + \underbrace{\ln(1+\varepsilon_2(x))}_{\text{prolongeable en } \pi/2^-}$

J converge car $\int_0^{\pi/2} \ln(\frac{\pi}{2}-x)\,dx$ converge.

2°/ $I = J$; On pose dans J (par exemple) $x = \frac{\pi}{2} - t$

donc $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(\frac{\pi}{2}-t))\,dt$ car $\cos(\frac{\pi}{2}-t) = \sin t$.

3°/ Calcul de I et J : $I + J = \int_0^{\pi/2} \ln((\sin x)(\cos x))\,dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln(\tfrac{1}{2}\sin 2x)\,dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)\,dx.$$

En posant $2x = t$, on obtient :

$I + J = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,dt$. Mais

$\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin t)\,dt}_{\text{on pose } t = \pi - \tau}$

$$= I + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \tau)\,d\tau = 2I$$

d'où $I + J = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I \Longrightarrow \boxed{J = I = -\frac{\pi}{2}\ln 2}$.

Exercice 4 : $0 < a < b$. $K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$, $f(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$

1°/ Convergence de K : * K n'est pas impropre en 0 car $\lim_{t \to 0} f(t) = b - a$.

* A l'infini, $f(t) = e^{-at} \underbrace{\left(\frac{1 - e^{-(b-a)t}}{t} \right)}_{\text{bornée dans } [1,+\infty[} \leq M e^{-at}$, donc converge.

2°/ Soient $0 < x < y$; $\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_x^y \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_x^y \frac{e^{-bt}}{t} dt$

On pose $at = \tau$, alors :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau.$$

$$= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau + \underbrace{\int_{bx}^{ay} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau - \int_{bx}^{ay} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau}_{=0} - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau.$$

d'où l'identité annoncée.

3°/ Comme $e^{-\tau}$ est décroissante alors :

$$e^{-bx} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau \leq e^{-ax} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

et $e^{-by} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \int_{ay}^{by} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau \leq e^{-ay} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

car $\int_{ax}^{bx} \frac{1}{\tau} d\tau = \ln\left(\frac{bx}{ax}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$, idem pour l'autre.

Donc $\ln\left(\frac{b}{a}\right)\left(e^{-bx} - e^{-ay}\right) \leq \int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right)\left(e^{-ax} - e^{-by}\right)$.

En faisant tendre $x \to 0^+$ et $y \to +\infty$ on obtient

$$\boxed{K = \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

<u>Exercice 5</u> : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1, et $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_0^{+\infty} f'(x)dx$ convergent.

On a $\int_0^{\lambda} f'(x)dx = f(\lambda) - f(0)$, donc $\lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = L$ existe car $\int_0^{\lambda} f'(x)dx \longrightarrow \int_0^{+\infty} f'(x)dx$ (hypothèse).

Faisons un raisonnement par l'absurde, supposons $L \neq 0$. Donc $L > 0$ ou bien $L < 0$. Faisons la démonstration pour $L > 0$ (pour $L < 0$ c'est idem). On a par la définition de la limite : $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0, \forall x : x \geq A_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$
$\Rightarrow L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon$.

Choisissons $\varepsilon = L/2$ (> 0). Alors :

$\forall x \geq A_{L/2}$, $f(x) \geq L/2$. Ceci implique que

$\int_0^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ car $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\lambda} f(x)dx$

et $\int_0^{\lambda} f(x)dx = \int_0^{A_{L/2}} f(x)dx + \int_{A_{L/2}}^{\lambda} f(x)dx \geq \int_0^{A_{L/2}} f(x)dx + \frac{L}{2}(\lambda - A_{L/2})$

ceci contredit l'hypothèse que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Ainsi on a forcément $L = 0$.

(CQFD)