Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°5

Exercice 1 : Préciser, pour chacune des intégrales suivantes, pourquoi elle est impropre ; puis étudier sa convergence.

$$\int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t}} \quad , \quad \int_0^{\pi} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\, dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} \quad , \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\, dx$$

Exercice 2 : Étudier, suivant les valeurs des paramètres, la convergence de chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\, dt \quad , \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha\left(1+x^\beta\right)}$$

Exercice 3 : On se propose de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx$$

1. Montrer que I et J sont convergentes.
2. A l'aide d'un changement de variable simple, montrer que $I = J$.
3. En considérant $I + J$, calculer la valeur commune.

Exercice 4 : Soit $0 < a < b$. On veut évaluer l'intégrale impropre suivante :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\, dt$$

1. Montrer que K est convergente.
2. Fixons $0 < x < y$. Montrer qu'on a
$$\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\, dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$
3. En utilisant la décroissance de la fonction $t \mapsto e^{-t}$, donner un encadrement de $\displaystyle\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\, dt$ puis déduire la valeur de K.

Exercice 5 : Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. On suppose que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(x)\, dx$ sont convergentes. Montrer alors de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.