Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°4

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier que les conditions de Dirichlet sont satisfaites, puis déterminer son développement en série de Fourier :

$$f(x) = \cos ax \qquad \text{sur }]-\pi, \pi[\qquad (f \text{ est } 2\pi - \text{périodique})$$

$$g(x) = \sinh ax \qquad \text{sur }]-\pi, \pi[\qquad (f \text{ est } 2\pi - \text{périodique})$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 0 < x \leq a \\ 0 & \text{si } \ a < x < \pi \end{cases} \qquad (h \text{ est } \pi - \text{périodique})$$

Exercice 2 : En utilisant les développements précédents, évaluer les sommes suivantes (justifier) :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \qquad , \qquad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2na)}{n}, \quad 0 < a < \pi$$

Exercice 3 : En utilisant les développements en séries de Fourier des fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x^2$ sur $[0, \pi]$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}, \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

Exercice 4 : Soit $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{n=N} |n|^{\alpha} |c_n|$ existe. Montrer alors que f est dérivable jusqu'à l'ordre $[\alpha]$.

Exercice 5 : Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\, dx$$

Dans quels cas a-t-on l'égalité ?

2ème année Mathématiques - Semestre 3 - 2019/2020.

Module : « Analyse III » - Série de TD N° 4 - Corrigé.

Exercice 1 : 1°/ $f(x) = \cos ax$, $\forall x \in]-\pi,\pi[$; f 2π-périodique.

Il est clair que sur $]-\pi,\pi[$, f est C^1. La 2π-périodicité impose l'étude de la qualité C^1 par morceaux en $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (il suffit de le faire en π et $-\pi$). On a $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} f(x) = \cos a\pi$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ >}} f(x) = \cos a\pi$.

Puis $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ >}} f(x) = \cos a\pi$; $\lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} f(x) = \cos a\pi$.

f étant continue partout, elle est C^0 par morceaux donc. Reste à étudier f'. On a $\forall x \in]-\pi,\pi[$, $f'(x) = -a\sin ax$.

$\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} f'(x) = -a\sin a\pi$, $\lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ >}} f'(x) = a\sin a\pi$, mais $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ >}} f'(x) =$

$= \lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ >}} f'(x) = a\sin a\pi$, et $\lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} f'(x) = -a\sin a\pi$.

Les limites à gauche et à droite de f' en π et $-\pi$ existent (finies) mais sont différentes donc f' est C^0 par morceaux (non C^0).

En définitive f vérifie bien l'hypothèse de Dirichlet, C^1 par morceaux.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin ax}{a}\right]_0^{\pi} = \frac{2\sin a\pi}{a\pi} \quad \text{si } a \neq 0$$

$$\boxed{a_0 = \begin{cases} \dfrac{2\sin a\pi}{a\pi} & \text{si } a \neq 0 \\ 2 & \text{si } a = 0 \end{cases}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(a+n)x + \cos(a-n)x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} + \frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}\right] = \frac{(-1)^n \sin a\pi}{\pi}\left[\frac{-1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right]$$

$$= (-1)^n \frac{2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)} \quad \text{si } a \notin \mathbb{Z}.$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n = |a| \\ (-1)^n \dfrac{2a \sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)} & \text{si } a \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$ car f est paire. En définitive :

* **Si $a \in \mathbb{Z}$** : La série de Fourier de f ne contient qu'un seul terme $1.\cos ax$, les autres coefficients sont nuls.

* **Si $a \notin \mathbb{Z}$** : $\boxed{\forall x \in [-\pi,\pi],\ \cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n \cos nx}{a^2-n^2}}$

2°/ $g(x) = \operatorname{sh} ax,\ \forall x \in]-\pi,\pi[$, g est 2π-périodique.

La vérification de la condition de Dirichlet se fait comme l'exemple précédent. Calculons les coefficients de Fourier : g étant impaire alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\operatorname{sh} ax)(\sin nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi}\left(e^{ax}-e^{-ax}\right)\left(e^{inx}-e^{-inx}\right)dx = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{e^{(a+in)\pi}-1}{a+in} - \frac{e^{(a-in)\pi}-1}{a-in} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-(a-in)\pi}-1}{a-in} - \frac{e^{-(a+in)\pi}-1}{a+in}\right] = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\left[\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a+in} - \frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a-in}\right]$$

$b_n = \dfrac{(-1)^{n-1}2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\cdot\dfrac{n}{a^2+n^2}$, d'où

$$\boxed{\forall x \in]-\pi,\pi[,\ \operatorname{sh} ax = \frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1} n}{a^2+n^2}\sin nx.}$$

3°/ $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq a \\ 0 & \text{si } a < x < \pi \end{cases}$, h est π-périodique.

La vérification de la condition de Dirichlet se fait facilement, les pts de discontinuité de f et f' sont $k\pi$ et $a + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{a} dx = \frac{2a}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x)\cos 2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{a} \cos 2nx\,dx = \frac{\sin 2na}{n\pi},\ n \geq 1.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x)\sin 2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{a} \sin 2nx\,dx = \frac{1-\cos 2na}{n\pi},\ n \geq 1$$

$$\boxed{\forall x \in]0,\pi[\setminus \{a\}\ ;\ h(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{n\geq 1} \frac{\sin 2na \cos 2nx + (1-\cos 2na)\sin 2nx}{n\pi}.}$$

<u>Exercice 2 :</u> * Calcul de $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$

Prenons dans la formule de f, $a = 1/2$ et $x = 0$, alors

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\frac{1}{4}-n^2}$$

d'où $\boxed{A = \frac{\pi-2}{4}}$

* Calcul de $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2na)}{n}$, $0 < a < \pi$

On utilise la fonction h, on a $h(0^+) = 0$, $h(0^-) = 1$

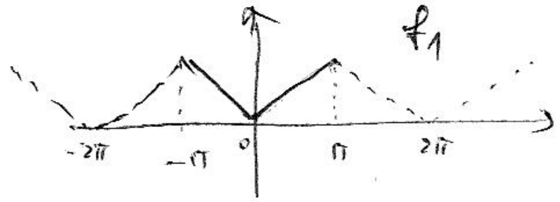
D'après le thm de Dirichlet, la série de Fourier converge vers $\frac{h(0^+)+h(0^-)}{2} = 1/2$, d'où

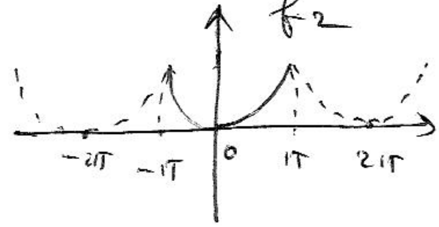
$$\frac{1}{2} = \frac{a}{\pi} + \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2na)}{n\pi}$$

et donc $\boxed{B = \frac{\pi}{2} - a}$

Exercice 3: Posons $f_1(x)=x$ et $f_2(x)=x^2$ sur $[0,\pi]$.

La formule proposée à la démonstration suggère le prolongement de ces deux fonctions en fonctions 2π-périodiques paires càd sur $[-\pi,\pi]$, $f_1(x)=|x|$ et $f_2(x)=x^2$. Tous les pts sont des points de continuité.





$$a_0(f_1)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[x^2\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n(f_1)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)=-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$$

et donc sur $[0,\pi]$, $\boxed{x=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx}$ (*)

$$a_0(f_2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx=\frac{2}{3\pi}\left[x^3\right]_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n(f_2)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)=-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\,d\left(\frac{\cos nx}{n}\right)=\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

et donc sur $[0,\pi]$, $\boxed{x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx}$ (**)

En faisant une combinaison linéaire de (*) et (**) on obtient

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}\ \text{sur } [0,\pi]}$$

<u>Exercice 4</u>: $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ et $\exists \alpha > 0$: $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} |n|^{\alpha}|c_n|$ existe.

* Montrons par exemple que f est continue, en montrant que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$. Posons $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$. On aura

$$S_{N+q}(x) - S_N(x) = \sum_{N+1\le |n|\le N+q} c_n e^{inx} \quad \text{d'où}$$

$$|S_{N+q}(x) - S_N(x)| \le \sum_{N+1\le|n|\le N+q} |c_n|$$

$$\le \sum_{N+1\le|n|\le N+q} |n|^{\alpha}|c_n| \cdot \frac{1}{|n|^{\alpha}}$$

$$\le \frac{1}{(N+1)^{\alpha}} \sum_{|n|\le N+q} |n|^{\alpha}|c_n|$$

Comme $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} |n|^{\alpha}|c_n|$ existe alors $\exists M>0$: $\forall N$: $\sum_{|n|\le N} |n|^{\alpha}|c_n| \le M$.

d'où $$\sup_{\mathbb{R}} |S_{N+q}(x) - S_N(x)| \le \frac{M}{(N+1)^{\alpha}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

c'est exactement la convergence uniforme.

* Pour montrer qu'on peut dériver jusqu'à un ordre k, il faut que la série dérivée (terme à terme) converge uniformément. En effet

$$S_N^{(k)}(x) = \sum_{|n|\le N} (in)^k c_n e^{inx}, \text{ et donc :}$$

$$\left|S_{N+q}^{(k)}(x) - S_N^{(k)}(x)\right| \le \sum_{N+1\le|n|\le N+q} |n|^k|c_n| \le \sum_{N+1\le|n|\le N+q} |n|^{\alpha-k}\cdot|n|^k|c_n| \cdot \frac{1}{|n|^{\alpha-k}}$$

$$\le \frac{1}{(N+1)^{\alpha-k}} \sum_{|n|\le N+q} |n|^{\alpha}|c_n| \quad \text{si } \alpha - k > 0.$$

Ceci est la convergence uniforme des dérivées k-ième des termes pourvu que $k<\alpha$. Si $\alpha\in\mathbb{N}$, on peut aller jusqu'à $k=\alpha$ car $\lim_{N,q\to+\infty} \sum_{N+1\le|n|\le N+q} |n|^{\alpha}|c_n| = 0$. (critère de Cauchy). Donc f est dérivable jusqu'à l'ordre $[\alpha]$.

Exercice 1: Puisque $f \in C^1(\mathbb{R})$ alors $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_n e^{inx}$

car $c_0 = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$. La convergence est simple et dans $L^2[0,2\pi]$. Pour $f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} in\, c_n e^{inx}$, la convergence est seulement dans $L^2[0,2\pi]$. La formule de Parseval-Plancherel dit que :

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n|^2$$

et

$$\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n^2 |c_n|^2$$

Comme $n \in \mathbb{Z}^*$, $n^2 \geq 1$ d'où l'inégalité :

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{4\pi} |f'(x)|^2 dx .$$

D'autre part, $\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx - \int_0^{4\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} (n^2-1)|c_n|^2$

$$= \sum_{|n| \geq 2} (n^2-1)|c_n|^2$$

Si la différence précédente est nulle, alors $\sum_{|n| \geq 2} (n^2-1)|c_n|^2 = 0$

ceci implique que $\forall n$, $|n| \geq 2$, $|c_n| = 0$ càd $c_n = 0$

donc $\boxed{f(x) = c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}}$ ce sont là les fonctions qui donnent l'égalité !