Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°4

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier que les conditions de Dirichlet sont satisfaites, puis déterminer son développement en série de Fourier :

$$f(x) = \cos ax \qquad \text{sur }]-\pi,\pi[\qquad (f \text{ est } 2\pi-\text{périodique})$$

$$g(x) = \sinh ax \qquad \text{sur }]-\pi,\pi[\qquad (f \text{ est } 2\pi-\text{périodique})$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 0 < x \leq a \\ 0 & \text{si } \ a < x < \pi \end{cases} \qquad (h \text{ est } \pi-\text{périodique})$$

Exercice 2 : En utilisant les développements précédents, évaluer les sommes suivantes (justifier) :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1} \qquad , \qquad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2na)}{n}, \quad 0 < a < \pi$$

Exercice 3 : En utilisant les développements en séries de Fourier des fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x^2$ sur $[0,\pi]$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}, \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

Exercice 4 : Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{n=N} |n|^\alpha \, |c_n|$ existe. Montrer alors que f est dérivable jusqu'à l'ordre $[\alpha]$.

Exercice 5 : Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx$$

Dans quels cas a-t-on l'égalité ?