Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1 : Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^n\, z^n}{(2n+3)!} \quad , \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^3}{(3n)!}\, z^n$$

Exercice 2 : Soit $(b_k)_{k\geq 1}$ une suite positive décroissante telle que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{b_k}{k}$ soit convergente.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} b_k = 0$.
2. Posons $c_n = b_1 b_2 \cdots b_n$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} c_n\, x^n$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On pose

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

1. Montrer que la fonction J_n est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est de classe C^2.
2. En déduire qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$x^2 J_n'' + x J_n' + (x^2 - n^2) J_n = 0$$

Exercice 4 : En utilisant des opérations permises sur les séries entières, calculer les sommes suivantes en indiquant le domaine de validité :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1}\, x^n \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} x^{2n} \quad , \quad \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

Exercice 5 : Donner le développement en série entière centrée en 0 pour chacune des fonctions suivantes, en précisant le rayon de convergence pour chaque cas :

$$f(x) = \ln\left(1 + x - 2x^2\right) \qquad , \qquad g(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Licence 2ème année - Semestre 3 - 2019/2020

Module : "Analyse III" - Liste de T.D. N° 3 - Corrigé.

Exercice 1 : Rayons de convergence.

$$* \sum_{n\geq 1} \frac{n^n z^n}{(2n+3)!} \quad ; \quad C_n = \frac{n^n}{(2n+3)!} \Rightarrow \frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{(2n+3)!}{(2n+5)!}$$

$$\Rightarrow \frac{C_{n+1}}{C_n} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow n\to+\infty \atop e} \underbrace{\frac{n+1}{(2n+5)(2n+4)}}_{\downarrow n\to+\infty \atop 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ d'où } \boxed{R=\infty}$$

$$* \sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n \quad ; \quad C_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!} \Rightarrow \frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{((n+1)!)^3}{(n!)^3} \cdot \frac{(3n)!}{(3n+3)!}$$

$$\Rightarrow \frac{C_{n+1}}{C_n} = (n+1)^3 \cdot \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{27}$$

d'où $\boxed{R = 27}$

Exercice 2 : Hyp : $b_k > 0$, (b_k) décroissante, $\sum_{k\geq 1} \frac{b_k}{k}$ converge.

1°/ $\lim_{k\to+\infty} b_k = 0$: Puisque (b_n) est décroissante, minorée par 0, alors $\lim_{k\to+\infty} b_k = l$ existe. Supposons que $l > 0$.

Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k, k \geq N(\varepsilon) \Rightarrow l - \varepsilon \leq b_k \leq l+\varepsilon$

Choisissons (par exemple) $\varepsilon = \frac{l}{2}$, alors $\forall k, k\geq N(\frac{l}{2})$: $b_k \geq l/2$

d'où $\frac{b_k}{k} \geq \frac{l/2}{k}$, comme $\sum_{k\geq N(\frac{l}{2})} \frac{l/2}{k}$ diverge alors $\sum_{k\geq 1} \frac{b_k}{k}$ diverge aussi, ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi nous avons forcément $l = 0$.

2°/ Rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} c_n x^n$, $c_n = b_1 b_2 \cdots b_n$.

Il est facile de voir que $\frac{c_{n+1}}{c_n} = b_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc le rayon de convergence $R = \infty$.

Exercice 3 : $n \in \mathbb{N}$ fixé, et $J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$

1°/ J_n est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2 : il suffit de montrer que le rayon de convergence est ∞. En effet

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!\,2^{2k}} \cdot (x^2)^k$$

En considérant la série précédente (sans $\left(\frac{x}{2}\right)^n$) comme fonction de x^2, on voit bien que c'est une série entière (pleine) avec

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!\,2^{2k}} \Longrightarrow \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \frac{1}{(k+1)\cdot(n+k+1)\,2^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

d'où $R = \infty$. Nous avons montré (en cours), qu'une série entière définit une fonction C^∞ à l'intérieur de son domaine de convergence. Ici le domaine est $\mathbb{R}$ tout entier.

2°/ J_n vérifie l'éq. diff : $x^2 J_n'' + x J_n' + (x^2 - n^2) J_n = 0$. En effet on a :

$$J_n'(x) = \frac{1}{2} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} (2k+n) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-1}$$

$$J_n''(x) = \frac{1}{4} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} (2k+n)(2k+n-1) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-2}.$$

Alors $x^2 J_n'' + x J_n' + (x^2 - n^2) J_n = F(x)$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} (2k+n)(2k+n-1) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \qquad x^2 J_n''$$

$$+ \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} (2k+n) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \qquad x J_n'$$

$$+ \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} (-n^2) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \qquad -n^2 J_n$$

$$+ \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\, 4 \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n+2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left\{ (2k+n)(2k+n-1) + (2k+n) - n^2 \right\} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$+ \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}\, 4}{(k-1)!\,(n+k-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Or $(2k+n)(2k+n-1) + (2k+n) - n^2 = (2k+n)^2 - n^2 = 2k(2k+2n)$

$$= 4k(k+n)$$

Alors $F(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k\, 4}{(k-1)!\,(n+k-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}\, 4}{(k-1)!\,(n+k-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$

et donc $F(x) \equiv 0$. (cqfd).

Exercice 4 : Calcul de sommes de séries entières.

a/ $S_1(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$, $R = 1$ (facile).

$$S_1(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n+1+1}{n+1} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1} + \sum_{n\geq 0} x^n$$

Si $x \neq 0$, $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$

d'où $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$ $(|x|<1)$

et donc (toujours avec $x \neq 0$) $S_1(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\ln(1-x)$

Ainsi $\boxed{S_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\ln(1-x) & \text{si } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}}$

Il est facile de vérifier que pour $x=1$ ou $x=-1$, la série diverge ; et que S_1 est C^∞ en $x=0$. (analytique d'ailleurs).

b/ $S_2(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n!} x^{2n}$; $(R = \infty)$

$$= -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n = -e^{-x^2/2} + 1$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{S_2(x) = 1 - e^{-x^2/2}}$

c/ $S_3(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ $(R = 1)$

Si $x \neq 0$, $S_3(x) = (1/x)\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n\geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$

d'où $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $(|x|<1)$

$\Rightarrow$ $\boxed{S_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$

Exercice 5 : Développement en séries entières centrées en 0.

a/ $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$, $D_f =]-\frac{1}{2}, 1[$ (facile)

On a aisément $1+x-2x^2 = (1-x)(1+2x)$ et que $\forall x \in D_f$

on peut écrire $f(x) = \ln(1-x) + \ln(1+2x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} = -\sum_{n\geq 0} x^n + 2\sum_{n\geq 0}(-2x)^n$$

càd $$f'(x) = \sum_{n\geq 0}\left\{-1+(-1)^n 2^{n+1}\right\} x^n$$

et donc $$f(x) = f(0) + \sum_{n\geq 0} \frac{-1+(-1)^n 2^{n+1}}{n+1} x^{n+1} \qquad (f(0)=0).$$

En définitive : $$\boxed{f(x) = -\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1+(-1)^n 2^n}{n}\right) x^n \text{ et seulement avec } |x|<1/2 \quad R = 1/2}$$

b/ $g(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $D_g = [-1, 1[$

Si $x \neq -1$, $g(x) = (1+x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)(1-x^2)^{-1/2}$. D'après les développements donnés en cours on a :

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n\geq 0} \frac{(1/2)_n}{n!} x^{2n}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{(2n-1)}{2} = \frac{(2n)!}{2^{n}\cdot n!}$$

d'où $$g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\left(x^{2n} + x^{2n+1}\right) = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$$

avec $$\boxed{c_{2n} = c_{2n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}} \qquad \boxed{R=1}$$

càd le développement est valable dans $]-1, 1[$.