Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1 : Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^n\, z^n}{(2n+3)!} \quad , \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^3}{(3n)!}\, z^n$$

Exercice 2 : Soit $(b_k)_{k\geq 1}$ une suite positive telle que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{b_k}{k}$ soit convergente.

1. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} b_k = 0$.
2. Posons $c_n = b_1 b_2 \cdots b_n$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} c_n\, x^n$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On pose

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

1. Montrer que la fonction J_n est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est de classe C^2.
2. En déduire qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$x^2 J_n'' + x J_n' + (x^2 - n^2) J_n = 0$$

Exercice 4 : En utilisant des opérations permises sur les séries entières, calculer les sommes suivantes en indiquant le domaine de validité :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1}\, x^n \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} x^{2n} \quad , \quad \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

Exercice 5 : Donner le développement en série entière centrée en 0 pour chacune des fonctions suivantes, en précisant le rayon de convergence pour chaque cas :

$$f(x) = \ln\left(1 + x - 2x^2\right) \quad , \quad g(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$