Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1 : Déterminer le domaine de convergence simple des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n} \quad , \quad \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^x} \quad , \quad \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{x^{2^n}-1} \quad , \quad \sum_{n\geq 0} e^{-nx}\cos nx$$

Exercice 2 : Pour les séries suivantes, étudier la convergence simple, puis normale, et enfin uniforme sur les ensembles indiqués :

$$u_n(x)=\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}+\cos x},\ n\geq 1 \text{ et } x\in\mathbb{R} \quad , \quad v_n(x)=\frac{x^n}{n^2},\ n\geq 1 \text{ et } x\in[-1,1]$$

$$w_n(x)=(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n}},\ n\geq 1 \text{ et } x\in[0,1] \quad , \quad \xi_n(x)=\frac{x}{n^2+x^2},\ n\geq 1 \text{ et } x\in\mathbb{R}_+,\ \text{puis } x\in[0,a]$$

Exercice 3 : Soit a un paramètre réel fixé. On pose

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(a^n x)}{n!}$$

Montrer que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est de classe C^∞.

Exercice 4 : On se propose de calculer la somme

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(4x)^n \qquad , \qquad -1<x<1.$$

1. Vérifier que la série converge.
2. On pose $I_{n,k}=\displaystyle\int_0^1(1-t)^n t^k\,dt$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I_{n,k}=\dfrac{n}{k+1}I_{n-1,k+1}$. En déduire que $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}=(2n+1)I_{n,n}$.
3. Soit $|y|\leq a<1$. En utilisant la dérivation, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(2n+1)y^n=\frac{1+y}{(1-y)^2}$.
4. En déduire qu'on peut écrire
$$S(x)=\int_0^1\frac{1+4xt(1-t)}{(1-4xt(1-t))^2}\,dt.$$
Justifier l'interversion de l'intégrale et la sommation.
5. Calculer enfin $S(x)$.

Licence 2ème année – Semestre 3 – 2019/2020.

Module : « Analyse III » – Liste de T.D. N°2 – Corrigé.

EX1 : Domaines de convergence simple des séries :

• $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$: $\left|\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}\right|^{1/n} = \frac{n^{1/2n}}{|x-2|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{|x-2|}$ (critère de Cauchy)

– cvgce absolue si $\frac{1}{|x-2|}<1 \iff |x-2|>1 \iff x\in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

– Si $|x-2|<1$ $(x\neq 2)$, divgce car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n} \neq 0$.

– Si $x=1$ ou $x=3$, il y a divergence car $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ $(x=3)$ et $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\sqrt{n}$ n'existe pas $(x=1)$.

Ainsi le domaine de convergence est $\boxed{D =]-\infty,1[\cup]3,+\infty[}$.

• $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n^x}$, $\left|\frac{x^n}{n^x}\right|^{1/n} = \frac{|x|}{n^{x/n}} = |x|\, e^{-x\frac{\ln n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$

. cvgce absolue si $|x|<1$ (par le critère de Cauchy).

. divergence si $|x|>1$ car $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^n}{n^x}\right| = +\infty$ $\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n^x}\neq 0\right)$.

. divergence si $x=1$ ou $x=-1$. D'où $\boxed{D=]-1,1[}$

• $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{x^{2^n}-1}$, posons $u_n(x) = \frac{x^n}{x^{2^n}-1}$ $(x\neq\pm1$ pour que $x^{2^n}-1\neq0)$.

$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x|\left|\frac{x^{2^n}-1}{x^{2^{n+1}}-1}\right|$. Si $|x|<1$, alors $\lim_{n\to+\infty} x^{2^n}=0$ donc

$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x|$ et comme on a déjà $|x|<1$, il y aura convergence absolue.

Si maintenant $|x|>1$. Alors $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x|\,\frac{1}{|x|^{2^n}}\left|\frac{1-x^{-2^n}}{1-x^{-2^{n+1}}}\right|$

et $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = 0$ (car $\lim_{n\to+\infty} x^{-2^n}=0$) et donc convergence absolue. En définitive le domaine de convergence est $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}}$.

• $\sum_{n\geq 0} e^{-nx}\cos nx$, $|e^{-nx}\cos nx| \leq e^{-nx} = (e^{-x})^n$

Il y aura convergence absolue si $e^{-x} < 1 \Leftrightarrow x > 0$. Or si $x \leq 0$ on aura $\lim_{n\to+\infty} e^{-nx}\cos nx = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } x < 0 \end{cases} \neq 0$ d'où divergence.

Enfin le domaine est $\boxed{D =]0, +\infty[}$

Ex 2: • $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n} + \cos x}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$$u_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x) \text{ avec } \begin{cases} a_n(x) = (-1)^n \\ b_n(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{n} + \cos x} \end{cases}$$

On a $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\right| \leq 1$ (facile). Aussi $b_n(x) > 0$, $b_n(x) \searrow$ (en n) et $\lim_{n\to+\infty} b_n(x) = 0$. Donc par le critère d'Abel, il y a convergence simple sur $\mathbb{R}$. D'autre part :

$|u_n(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{n} + \cos x}$ ($2\sqrt{n} + \cos x > 0$ car $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $n \geq 1$).

$|u_n(x)|' = \dfrac{\sin x}{(2\sqrt{n} + \cos x)^2}$, les extrémums sont pour $x_\ell = \ell\pi$ ($\ell \in \mathbb{Z}$)

$|u_n(\ell\pi)| = \dfrac{1}{2\sqrt{n} + (-1)^\ell} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{n} - 1}, & \ell \text{ impair} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{n} + 1}, & \ell \text{ pair} \end{cases}$ donc

$\sup_{\mathbb{R}} |u_n(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{n} - 1}$, c'est une série divergente. Donc pas de convergence normale sur $\mathbb{R}$. Par contre $\sup_{\mathbb{R}} b_n(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{n} - 1}$ et donc $b_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{unif}^t \text{ en } x \in \mathbb{R}} 0$. Donc par le critère d'Abel uniforme il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

• $v_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2}$, $n \geq 1$, $x \in [-1, 1]$. On a $|v_n(x)|^{1/n} = \dfrac{|x|}{n^{2/n}} \to |x|$. Cvg ^{ce} absolue si $|x| < 1$. Si $x = 1$ ou $x = -1$, $|v_n(\pm 1)| = \dfrac{1}{n^2}$, cvg ^{ce} Cauchy. Donc convergence absolue sur $[-1, 1]$.

$$|v_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad (\text{car } |x| \leq 1) \Rightarrow \sup_{[-1,1]} |v_n(x)| \leq 1/n^2$$

Donc il y a convergence normale sur $[-1,1]$, donc uniforme.

- $W_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$, $x \in [0,1]$. $W_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x)$ avec

$a_n(x) = (-1)^n$, $b_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\right| \leq 1$, et $b_n(x) \geq 0$, $\lim_{n \to +\infty} b_n(x) = 0$

$\frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)} = x\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq 1$ d'où la décroissance (en n) de la suite $(b_n(x))$

Le critère d'Abel s'applique. Convergence simple sur $[0,1]$.

Maintenant $|W_n(x)| = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ et $\sup_{x \in [0,1]} |W_n(x)| = 1/\sqrt{n}$ (diverge)

donc pas de convergence normale. Mais il y a convergence uniforme sur $[0,1]$ car $\sup_{[0,1]} b_n(x) = 1/\sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. (Critère d'Abel uniforme).

- $\xi_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$, $n \geq 1$, $x \geq 0$. $\lim_{n \to +\infty} n^2 \xi_n(x) = x$, d'où la convergence simple sur $[0,+\infty[$ par le critère de Riemann.

$$\xi_n'(x) = \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} \quad \begin{array}{c|ccccc} & 0 & + & n & - & +\infty \end{array} \Rightarrow \sup_{[0,+\infty[} \xi_n(x) = \xi_n(n) = \frac{1}{2n}$$

diverge, donc pas de convergence normale sur $[0,+\infty[$. Pour la convergence uniforme examinons : (pour $p \geq q$)

$$\left|\sum_{k=q+1}^{p} \xi_k(x)\right| = \sum_{k=q+1}^{p} \xi_k(x) = \sum_{k=q+1}^{p} \frac{x}{k^2+x^2} \geq (p-q)\frac{x}{p^2+x^2}$$

On a $\sup_{\mathbb{R}_+} \left|\sum_{k=q+1}^{p} \xi_k(x)\right| \geq (p-q) \sup_{\mathbb{R}_+} \frac{x}{p^2+x^2}$

$$\geq (p-q) \cdot \frac{1}{2p}.$$

Soit N un entier qcq. Prenons $q = N$ et $p = 2N$ (par exemple)

Alors $\sup_{\mathbb{R}_+} \left|\sum_{k=N+1}^{2N} \xi_k(x)\right| \geq N \cdot \frac{1}{4N} = 1/4$ cad <u>on n'a pas</u>

$\lim_{N \to +\infty} \left(\sup_{\mathbb{R}_+} \left|\sum_{k=N+1}^{2N} \xi_k(x)\right|\right) = 0$. Donc pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Etude de la même série sur $[0,a]$. La convergence simple a lieu car elle avait déjà lieu sur $[0,+\infty[$. Pour la convergence normale on a :

$$\sup_{[0,a]} \xi_n(x) = \frac{a}{n^2+a^2} \quad (\text{si } n \geqslant a)$$

càd il y a convergence normale sur $[0,a]$, donc uniforme aussi.

EX3 : Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé et $f(x) = \sum \frac{\sin(a^n x)}{n!}$

Dire que f est définie sur $\mathbb{R}$, veut dire que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$. On a : $\left|\frac{\sin(a^n x)}{n!}\right| \leq 1/n!$

La convergence de $\sum 1/n!$ implique la convergence simple de notre série. Pour la dérivation d'ordre k qcq on a :

$$\left|\left(\frac{\sin(a^n x)}{n!}\right)^{(k)}\right| = \left|\frac{a^{nk}(-1)^{k+1}}{n!}\begin{cases}\sin(a^n x)\\ \text{ou}\\ \cos(a^n x)\end{cases}\right| \leq \frac{|a|^{kn}}{n!}$$

$$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}}\left|\left(\frac{\sin(a^n x)}{n!}\right)^{(k)}\right| \leq \frac{|a|^{kn}}{n!}$$

La série majorante est convergente (par d'Alembert par exemple) d'où la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de $\sum \left(\frac{\sin(a^n x)}{n!}\right)^{(k)}$

Ainsi $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

EX4 : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(4x)^n$ et $-1 < x < 1$.

1°/ Posons $u_n(x) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}(4x)^n$, alors $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = 4|x| \cdot \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$

et $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x|$ déjà <1 donc convergence absolue.

2°/ $I_{n,k} = \int_0^1 (1-t)^n t^k\,dt = \int_0^1 (1-t)^n\,d\left(\frac{t^{k+1}}{k+1}\right) = \cancel{\left[(1-t)^n\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1}^{\,0} + \frac{n}{k+1}\int_0^1 (1-t)^{n-1}t^{k+1}\,dt$

$$\Rightarrow \boxed{I_{n,k} = \frac{n}{k+1} I_{n-1,k+1}}$$

Ainsi $I_{n,k} = \frac{n}{k+1} I_{n-1,k+1} = \frac{n(n-1)}{(k+1)(k+2)} I_{n-2,k+2} = \dots =$

$$= \frac{n(n-1)\dots 1}{(k+1)(k+2)\dots(k+n)} I_{0,k+n} = \frac{n!\,k!}{(k+n)!} I_{0,k+n}$$

Or $I_{0,k+n} = \int_0^1 t^{k+n}\,dt = \frac{1}{k+n+1}$. D'où

$$I_{n,k} = \frac{n!\,k!}{(k+n)!} \cdot \frac{1}{k+n+1}$$

et donc $I_{n,n} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{1}{2n+1} \Rightarrow \boxed{\frac{(n!)^2}{(2n)!} = (2n+1) I_{n,n}.}$

3°/ Considérons $T(y) = \sum_{n\geq 0} (2n+1) y^n = 2\sum_{n\geq 0}(n+1)y^n - \sum_{n\geq 0} y^n$

$\sup_{|y|\leq a} |y^n| \leq a^n$, donc $\sum_{n\geq 0} y^n$ converge normalement sur $[-a,a]$ et aussi

$\sup_{|y|\leq a} |(n+1)y^n| \leq (n+1)a^n$ car $\frac{(n+2)a^{n+1}}{(n+1)a^n} = \frac{n+2}{n+1} a \longrightarrow a < 1$. Donc

On peut écrire $\sum_{n\geq 0}(n+1)y^n = \sum_{n\geq 0}(y^{n+1})' = \left(\sum_{n\geq 0} y^{n+1}\right)' = \left(\frac{y}{1-y}\right)' = \frac{1}{(1-y)^2}$

D'où $T(y) = \frac{2}{(1-y)^2} - \frac{1}{1-y} = \frac{1+y}{(1-y)^2}$

4°/ On peut écrire $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (4x)^n (2n+1) \int_0^1 (1-t)^n t^n\,dt$.

Pour intervertir $\sum$ et $\int$ il suffit de montrer que la série de fonctions en $\underline{\underline{t}}$ $\sum_{n\geq 0} (2n+1)\left(4xt(1-t)\right)^n$ cvge unif^{t} sur $[0,1]$.

Or $|4xt(1-t)| = 4|x|\,t(1-t) \leq 4|x| \cdot \frac{1}{4}$ $\quad \max_{0\leq t\leq 1} t(1-t) = 1/4$.

$\leq |x| < 1$

Donc $S(x) = \int_0^1 T(4xt(1-t))\,dt$

$$\boxed{S(x) = \int_0^1 \frac{1+4xt(1-t)}{[1-4xt(1-t)]^2}\,dt.}$$

5°/ <u>Calcul de $S(x)$:</u> La fonction sous l'intégrale est une fraction rationnelle.

$$1-4xt(1-t) = 1-4xt+4xt^2$$

1er cas : $\boxed{x>0}$ $\quad 1-4xt(1-t) = \left(2t\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)^2+1-x$

$$= (1-x)\left[1+\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}t-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right)^2\right]$$

On pose le changement $u = 2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,t-\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

Alors $\displaystyle\int \frac{1+4xt(1-t)}{\left[1-4xt(1-t)\right]^2}dt = \int \frac{2-(1-x)(1+u^2)}{(1-x)^2(1+u^2)^2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)du$

$$= \frac{1}{2(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\left[\operatorname{arctg} u+\frac{u}{1+u^2}\right]-\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\operatorname{arctg} u$$

$$= \frac{1}{2(1-x)\sqrt{x(1-x)}}\left\{x\operatorname{arctg} u+\frac{u}{1+u^2}\right\}$$

On a que si $t=0 \longrightarrow u=-\sqrt{\frac{x}{1-x}}$; $t=1 \longrightarrow u=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

d'où $\boxed{S(x) = \frac{1}{1-x}+\frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)}$

<u>2ème cas :</u> $\boxed{x<0}$ $\quad 1-4xt(1-t) = 1-x-\left(2t\sqrt{-x}-\sqrt{-x}\right)^2$

$$= (1-x)\left[1-\left(2t\sqrt{\frac{-x}{1-x}}-\sqrt{\frac{-x}{1-x}}\right)^2\right]$$

On fait le changement $v = 2t\sqrt{\frac{-x}{1-x}}-\sqrt{\frac{-x}{1-x}}$; alors

$$\int\frac{1+4xt(1-t)}{\left(1-4xt(1-t)\right)^2}dt = \int\frac{2-(1-x)(1-v^2)}{(1-x)^2(1-v^2)^2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{-x}}\right)dv$$

On trouve enfin

$$\boxed{S(x) = \frac{1}{1-x}+\frac{\sqrt{-x}}{(1-x)^{3/2}}\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{-x}{1-x}}\right)}$$