Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1 : Déterminer le domaine de convergence simple des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^x} \quad , \quad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{x^{2^n}-1} \quad , \quad \sum_{n\geq 0} e^{-nx}\cos nx$$

Exercice 2 : Pour les séries suivantes, étudier la convergence simple, puis normale, et enfin uniforme sur les ensembles indiqués :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}+\cos x},\ n\geq 1 \text{ et } x\in\mathbb{R} \quad , \quad v_n(x) = \frac{x^n}{n^2},\ n\geq 1 \text{ et } x\in[-1,1]$$

$$w_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}},\ n\geq 1 \text{ et } x\in[0,1] \quad , \quad \xi_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2},\ n\geq 1 \text{ et } x\in\mathbb{R}_+,\ \text{puis } x\in[0,a]$$

Exercice 3 : Soit a un paramètre réel fixé. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(a^n x)}{n!}$$

Montrer que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est de classe C^∞.

Exercice 4 : On se propose de calculer la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(4x)^n \qquad , \qquad -1 < x < 1.$$

1. Vérifier que la série converge.
2. On pose $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n t^k \, dt$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I_{n,k} = \dfrac{n}{k+1} I_{n-1,k+1}$. En déduire que $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = (2n+1)I_{n,n}$.
3. Soit $|y| \leq a < 1$. En utilisant la dérivation, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(2n+1)y^n = \frac{1+y}{(1-y)^2}$.
4. En déduire qu'on peut écrire
$$S(x) = \int_0^1 \frac{1+4xt(1-t)}{(1-4xt(1-t))^2}\, dt.$$
Justifier l'interversion de l'intégrale et la sommation.
5. Calculer enfin $S(x)$.