| Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen | A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques |
|---|---|
| Faculté des Sciences - Département de Mathématiques | Analyse 3 - Fiche de T.D n°1 |

**Exercice 1 :** Déterminer la formule du terme général des séries suivantes écrites *in extenso* (les quelques premiers termes)

$$\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\cdots \quad , \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}-\frac{1.3.5.7.}{2.4.6.8}+\cdots \quad , \quad 1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\cdots$$

**Exercice 2 :** En utilisant différents critères, étudier la convergence des séries à termes positifs suivantes :

$$u_n=\frac{2.5.8\cdots(3n+2)}{1.5.9\cdots(4n+1)} \quad , \quad v_n=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} \quad , \quad w_n=\frac{a^n}{n!} \quad , \quad x_n=\frac{1}{\ln n}$$

$$y_n=\frac{b^n n!}{n^n} \quad , \quad z_n=1-\cos\frac{\pi}{n} \quad , \quad t_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \quad , \quad p_n=\frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))}$$

**Exercice 3 :** Considérons une série $\sum a_n$ à termes positifs divergente. On pose $b_n=\dfrac{a_n}{1+a_n}$ et $c_n=\dfrac{a_n}{1+n^2a_n}$. Montrer que la série $\sum b_n$ est divergente, et que $\sum c_n$ est convergente. Que peut-on dire de la série $\sum\dfrac{a_n}{1+a_n^2}$?

**Exercice 4 :** On définit une suite par $a_1=2$ et $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1,\ \forall n\geq 1$. Montrer que $(a_n)$ est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$. En déduire que la série $\sum 1/a_n$ est convergente, puis calculer sa somme. (Indication pour la dernière question : montrer d'abord par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1/a_k=1-1/(a_{n+1}-1)$)

**Exercice 5 :** Pour les séries suivantes, étudier la convergence absolue, puis la semi-convergence.

$$u_n=(-1)^n\frac{1.4.7\cdots(3n-2)}{7.9.11\cdots(2n+5)} \quad , \quad v_n=\frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n} \quad , \quad w_n=(-1)^n\frac{\ln n}{n}$$

**Exercice 6 :** En considérant la décomposition en fractions simples, calculer les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Licence 2ème année - Semestre 3 - 2019/2020.

Module : « Analyse III » - Liste de TD N°1 - Corrigé.

**EX1 :** Terme général d'une série écrite "in extenso" :

$\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\cdots \longrightarrow u_n=\frac{n+3}{(n+2)^2}, \quad n\geq 0$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots \longrightarrow u_n=\frac{1}{n(n+1)} \; ; \quad n\geq 1$

$\frac{1}{2}-\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}+\cdots \longrightarrow u_n=(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}\frac{(2j-1)}{(2j)!} \; , \quad n\geq 1$

$=(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}.(n!)^2} \; ; \quad n\geq 1 .$

$1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\cdots \longrightarrow u_n = n^{(-1)^{n-1}} \; , \quad n\geq 1 .$

---

**EX2 :** Etude de la convergence de séries à termes positifs.

$u_n=\frac{2.5.8\ldots(3n+2)}{1.5.9\ldots(4n+1)} \; ; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3n+5}{4n+5}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 3/4<1$ : cvge d'après d'Alembert.

$v_n=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} ; \quad v_n^{1/n}=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-1/n}\longrightarrow \frac{1}{3^2}<1$ : cvge d'après Cauchy.

$w_n=\frac{a^n}{n!} \; ; \quad \frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{a}{n+1}\longrightarrow 0<1$ : cvge d'après d'Alembert $(a>0)$

$x_n=\frac{1}{\ln n} \; ; \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\,x_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}=+\infty, \; \exists n_0\in\mathbb{N} : \forall n\geq n_0 \; \frac{\sqrt{n}}{\ln n}\geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\ln n}\geq\frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n\geq n_0)$

or $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (critère de Riemann), donc $\sum\frac{1}{\ln n}$ diverge.

$y_n=\frac{b^n n!}{n^n} \; ; \quad \frac{y_{n+1}}{y_n}=b\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} b.e^{-1}$ donc

- Si $b<e$, elle converge
- Si $b>e$, elle diverge

$\Big\}$ par d'Alembert.

- Si $b=e$, on a : $\frac{y_{n+1}}{y_n}=1+\frac{1}{2n}+o(1/n)\longrightarrow$ elle diverge par le critère de Raabe-Duhamel.

$z_n = 1 - \cos\frac{\pi}{n}$ , $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 z_n = \frac{\pi}{2}^2$ donc $z_n \sim \frac{\pi^2}{2n^2}$ $(n\to+\infty)$

et donc $\sum z_n$ converge.

$t_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2} t_n = 1 \Rightarrow \sum t_n$ cvge (Riemann)

$p_n = \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))}$ ; on fait la même étude que pour la serie de Bertrand.

On considère d'abord $n \geq 3$ pour que $p_n$ soit défini et $> 0$.

Posons $g(x) = \ln(\ln x)$ alors $p_n = \frac{g'(n)}{g(n)}$. On vérifie que $\frac{g'(x)}{g(x)}$ est décroissante dans $[3, +\infty[$. Alors :

$n \leq x \leq n+1 \Rightarrow p_{n+1} \leq g'(x)/g(x) \leq p_n \Rightarrow p_{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{g'(x)}{g(x)}dx \leq p_n$

$\Rightarrow p_{n+1} \leq \ln g(n+1) - \ln g(n) \leq p_n$. Par sommation de 3 à n on obtient :

$$\sum_{k=4}^{n+1} p_k \leq \ln g(n+1) - \ln g(3) \leq \sum_{k=3}^{n} p_k$$

$$\Rightarrow \ln(\ln(\ln(n+1))) \leq \ln(\ln(\ln 3)) + \sum_{k=3}^{n} p_k$$

d'où la divergence de $\sum p_k$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln(\ln(n+1))) = +\infty$.

---

**EX3 :** Hyp : $\sum a_n$ div et $a_n \geq 0$.

On pose $b_n = \frac{a_n}{1+a_n}$ et $c_n = \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$.

$P^b{}_1$ : $\sum b_n$ div ? On a $a_n = \frac{b_n}{-b_n+1}$

Si on suppose que $\sum b_n$ cvge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - b_n = 1$

donc $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : 1 - b_n \geq 1/2$, d'où $a_n \leq 2b_n$

ce qui implique de $\sum a_n$ cvge (comparaison); absurde donc $\sum b_n$ divg

$P^b{}_2$ : $\sum c_n$ cvg ? $0 \leq c_n \leq \frac{a_n}{n^2 a_n} = \frac{1}{n^2}$ d'où la convergence par comparaison avec $\sum 1/n^2$.

Pb3 : Que peut-on dire de $\sum \frac{a_n}{1+a_n^2}$ ?

On ne peut rien dire en général. En effet si $a_n \equiv 1$, alors $\frac{a_n}{1+a_n^2} = \frac{1}{2}$ ($\sum \frac{1}{2}$ diverge). Par contre si $a_n = n^2$ ($\sum a_n$ diverge) alors $\frac{a_n}{1+a_n^2} = \frac{n^2}{1+n^4} \sim \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

---

EX4 : $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$

On a $a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 \geq 0$ d'où la croissance de $(a_n)_{n\geq 1}$.

Si $(a_n)$ était majorée, elle aurait une limite $l$ et l vérifie :

$$l = l^2 - l + 1 \Rightarrow (l-1)^2 = 0 \Rightarrow l = 1.$$

Or la croissance implique que $\forall n \geq 1$, $a_n \geq a_1 = 2$, donc la limite ne peut pas être $l = 1$. Donc $(a_n)$ n'est pas majorée d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Un calcul direct donne : $a_2 = 3$, $a_3 = 7$ ; $a_4 = 43$ ..

On se propose de montrer que $\forall n \geq 4$, $a_n \geq 2^n$. C'est déjà vrai pour $n=4$.

Supposons que c'est vrai jusqu'à $n$, alors $a_n - 1 \geq 2^n - 1$ et donc

$a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1) \geq 2^n(2^n - 1) \Rightarrow a_{n+1} \geq 2^{2n} - 2^n + 1$

Vérifions que $2^{2n} - 2^n + 1 \geq 2^{n+1}$. En effet $(2^{2n} - 2^n + 1) - 2^{n+1} =$

$= 2^{2n} - 3 \cdot 2^n + 1 = \left(2^n - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(2^n - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0$ car chaque terme est positif (au moins pour $n \geq 4$) ; d'où $a_n \geq 2^n$.

Et donc $\frac{1}{a_n} \leq 1/2^n$ càd $\sum 1/a_n$ est convergente.

Pour calculer sa somme, montrons que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{-1} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$ par récurrence. $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1} + \frac{1}{a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1} - 1)}$

$= 1 - \frac{1}{a_{n+2} - 1}$ (car $a_{n+2} = a_{n+1}^2 - a_{n+1} + 1$).

Donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}\right) = \boxed{1}$ car $\frac{1}{a_{n+1} - 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

**Ex5 :** • $u_n = (-1)^n \dfrac{1\cdot 4\cdot 7 \cdots (3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11 \cdots (2n+5)}$ ; $n \geq 1$.

$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{3n+1}{2n+7} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{3}{2} > 1$ ; donc pas de convergence absolue. De plus $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geq \dfrac{5}{4} > 1$

$\Longrightarrow |u_n| \geq |u_{n_0}| \cdot \left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-n_0}$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ càd $\sum u_n$ diverge (condition nécessaire de convergence)

• $v_n = \dfrac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}$ ; $|v_n| \leq \dfrac{1}{(\ln 10)^n}$. Comme $0 < \dfrac{1}{\ln 10} < 1$ alors la série $\sum \dfrac{1}{(\ln 10)^n}$ converge, et donc $\sum v_n$ cvge absolument et donc converge.

• $w_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$, $|w_n| = \dfrac{\ln n}{n}$ $(n \geq 1)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} :$ $n \geq n_0 \Rightarrow \ln n \geq 1$

d'où $n \geq n_0 \Rightarrow |w_n| \geq 1/n$, donc pas de convergence absolue de $\sum w_n$. D'autre part, si $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} < 0$ si $x \geq 3$. Donc la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geq 3}$ est décroissante, positive et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$. Par le critère d'Abel la série $\sum w_n$ (alternée) est convergente. (sans être absolument convergente).

**Ex6 :** • $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\right] = 1/4$.