Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 3 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1 : Déterminer la formule du terme général des séries suivantes écrites *in extenso* (les quelques premiers termes)

$$\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\cdots \quad , \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}-\frac{1.3.5.7.}{2.4.6.8}+\cdots \quad , \quad 1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\cdots$$

Exercice 2 : En utilisant différents critères, étudier la convergence des séries à termes positifs suivantes :

$$u_n=\frac{2.5.8\cdots(3n+2)}{1.5.9\cdots(4n+1)} \quad , \quad v_n=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} \quad , \quad w_n=\frac{a^n}{n!} \quad , \quad x_n=\frac{1}{\ln n}$$

$$y_n=\frac{b^n n!}{n^n} \quad , \quad z_n=1-\cos\frac{\pi}{n} \quad , \quad t_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \quad , \quad p_n=\frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))}$$

Exercice 3 : Considérons une série $\sum a_n$ à termes positifs divergente. On pose $b_n=\dfrac{a_n}{1+a_n}$ et $c_n=\dfrac{a_n}{1+n^2a_n}$. Montrer que la série $\sum b_n$ est divergente, et que $\sum c_n$ est convergente. Que peut-on dire de la série $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n^2}$?

Exercice 4 : On définit une suite par $a_1=2$ et $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$, $\forall n\geq 1$. Montrer que (a_n) est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$. En déduire que la série $\sum 1/a_n$ est convergente, puis calculer sa somme. (Indication pour la dernière question : montrer d'abord par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1/a_k=1-1/(a_{n+1}-1)$)

Exercice 5 : Pour les séries suivantes, étudier la convergence absolue, puis la semi-convergence.

$$u_n=(-1)^n\frac{1.4.7\cdots(3n-2)}{7.9.11\cdots(2n+5)} \quad , \quad v_n=\frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n} \quad , \quad w_n=(-1)^n\frac{\ln n}{n}$$

Exercice 6 : En considérant la décomposition en fractions simples, calculer les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$