Université de Tlemcen :: Faculté des sciences :: Département de mathématiques
$2^{\text{ème}}$ année LMD MI - Mathématiques - (Semestre 3)

Epreuve de rattrapage de logique mathématique

18 Novembre 2020 *Durée : 1 h 30 mn*

Questions de cours (5.5 points)

1. Citer un des axiomes de Zermelo et Fraenkel.
2. Un ensemble peut être défini de deux manières ; lesquelles ? Citer des exemples.
3. Citer un exemple familier qui justifie la table de valeurs de l'implication matérielle.
4. On dit que le connecteur unaire négation satisfait à la propriété d'involution ; expliquer.

Exercice 1 (2 points)

Soit E un ensemble non vide donné et soient A et B deux parties de E. Résoudre et discuter dans l'ensemble $\mathscr{P}(E)$, l'équation d'inconnue X, suivante

$$A \cup X = B.$$

Exercice 2 (7 points)

Etant donnés trois atomes a, b et c, posons

$$F := (a \Rightarrow b) \vee (\neg a \Rightarrow c)$$

1. Construire la table de valeurs de la formule F. Conclure.
2. Peut-on arriver à la conclusion précédente sans dresser de table de valeurs.
3. Citer deux constructions de la formule F.

Exercice 3 (5 points)

Soit la formule prédicative

$$F := \forall x\, P(x) \Rightarrow P(x)$$

où P(.) est un ion à une place.

1. Supposons que $\Omega_P := \{a, b, c\}$. Quel est le nombre de lignes de la table de valeurs de F ? Justifier correctement la réponse (déterminer en détail les entrées de la table de valeurs.)
2. Etablir que $\models F$

Présentation de la copie : 0.5 point

Corrigé

Questions de cours

1. Voir MP 1, pages 30, 33, 34. (1 point)
2. Voir MP 1, page 34. (2 points)
3. Voir MP 1, page 32, 33. (2 points)
4. Voir MP 1, page 40. (0.5 point)

Exercice 1 (2 points)

L'existence d'une solution X de l'équation proposée nécessite que A est une partie de B. Donc :

- Si A n'est pas contenue dans B, alors l'équation proposée n'a pas de solution.
- Si A est contenue dans B, alors X := B\A est une solution particulière de l'équation ; c'est la plus petite solution au sens de l'inclusion ensembliste. La solution générale de l'équation s'écrit sous la forme

$$X := (B\backslash A) \cup C, \text{ où } C \text{ est une partie quelconque de } A.$$

Exercice 2

1. Dressons la table de valeurs de la formule F. (2 points)

a	b	c	$\neg$ a	a $\Rightarrow$ b	$\neg$ a $\Rightarrow$ c	F
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

On conclut que la formule F est valide. (0.5 point)

2. On arrive effectivement à la conclusion précédente sans dresser de table de valeurs. Il suffit de remarquer que la formule F est une disjonction des deux formules propositionnelles $a \Rightarrow b$ et $\neg a \Rightarrow c$. Si on attribue la valeur logique 0 à l'atome a, alors (selon la table de valeurs de l'implication matérielle) la (première) formule $a \Rightarrow b$ obtient la valeur logique 1. Et si on attribue la valeur logique 1 à l'atome a, alors la (seconde) formule $\neg a \Rightarrow c$ obtient la valeur logique 1. En résumé, dans toutes les évaluations possibles, ces deux formules ne peuvent être simultanément fausses. (1.5 point)

3. Voici une première construction de la formule propositionnelle F : (1.5 point)

$P_1 := a$ (atome)
$P_2 := b$ (atome)
$P_3 := P_1 \Rightarrow P_2$
$P_4 := \neg P_1$
$P_5 := c$ (atome)
$P_6 := P_4 \Rightarrow P_5$
$P_7 := P_3 \vee P_6$

Et voici une seconde construction de F : (1.5 point)

$Q_1 := a$ (atome)
$Q_2 := b$ (atome)
$Q_3 := c$ (atome)
$Q_4 := \neg Q_1$
$Q_5 := Q_1 \Rightarrow Q_2$
$Q_6 := P_4 \Rightarrow Q_3$
$Q_7 := Q_5 \vee Q_6$

Exercice 3

1. Supposons que $\Omega_P := \{a, b, c\}$. La première occurrence de x dans la formule F est liée par le quanteur universel. La seconde occurrence de x est libre ; elle sera représentée en entrée de la TV de F. Nous lui attribuons, à tour de rôle, chacun des trois éléments de Ω_P. Par ailleurs, l'ion P(.) est représenté en entrée de la TV par les fonctions logiques qui sont associées à P(.) et à Ω_P. Ces fonctions s'écrivent sous forme

$$\varphi(t) := \begin{cases} v_1 & \text{si } t = a \\ v_2 & \text{si } t = b \\ v_3 & \text{si } t = c \end{cases}$$

   où v_1, v_2 et v_3 sont des valeurs logiques. Selon le principe fondamental d'arithmétique, le nombre de ces fonctions est $2^3 = 8$. D'après ce même principe, la TV de F est constituée de 3*8 = 24 lignes. (2 points)

2. Supposons que l'ion P(.) a pour champ, un ensemble Ω, de cardinal arbitrairement choisi n. Considérons une quelconque réalisation de la formule F. Cette dernière est déterminée par le choix d'un élément a de Ω (qui sera attribué à l'occurrence libre de F) et d'une fonction logique $\varphi(.)$ associée à P(.) et à Ω. Distinguons deux cas.

- Si $\varphi(a) = 1$, alors la formule F obtient la valeur logique 1.
- Si $\varphi(a) = 0$, alors la valeur logique de l'ion $\forall x\, P(x)$ est 0, et dans ce cas également, la formule F obtient la valeur logique 1.

C'est ce qu'il fallait démontrer. (3 points)