Université de Tlemcen 19/11/20
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L2 MATH Topologie

Epreuve de rattrapage

Durée 01h30

Exercice 1 07 pts

On considère l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie induite par la distance usuelle

1) Déterminer l'intérieur,la fermeture et la frontière des parties suivantes $\{0\}$, $\mathbb{Q}$, $[-1,2]$ *et* $]-\infty,0]$. Ces partie sont -elles compactes ? justifier.

2) Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

a) Montrer que l'ensemble $A=\{x\in\mathbb{R}/\ f(x)=0\}$ est fermé..

b) En déduire que si $f=0$ sur $\mathbb{Q}$ alors $f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$

c) Etudier la compacité des parties $f([-1,2])$ et $\overline{f(\mathbb{Q})}$.

Exercice 2: 06 pts

Soient (E,d) un espace métrique complet et A une partie non vide de E

1) Montrer que A est fermée si et seulement si
$\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset$ A $\quad lim_{n\to+\infty}x_n=a \quad\Rightarrow a\in A$

2) On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$ $A_n=\bigcup\limits_{x\in A}B\left(x,\frac{1}{n}\right)$,
Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ A_n est ouvert et contient A .

3) Soit F$=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}A_n$ montrer que:

a) A $\subset F$

b) $\forall a\in F\quad\exists n\in\mathbb{N}^*$et $x_n\in A$ tels que $\lim_{n\to+\infty}x_n=a$

c) $\bar{\text{A}}\subset F$

d) En déduire que toute partie (non vide) fermée est égale à l'intersection dénombrable d'ouverts.Conclure!

Exercice 3: 07pts

1) Soit l'application $f:\ \mathbb{R}\to]-1;1[$ telle que $f(x)=\frac{x}{2+|x|}$, montrer que f est bijective

2) On muni $\mathbb{R}$ *et* $]-1;1[$ de la distance usuelle ,vérifier que f et f^{-1} sont continues

3) Montrer que l'application $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\forall x,y\in\mathbb{R}\quad d(x,y)=|f(x)-f(y)|$, est une distance sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que $id:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},|.|)$ est un homéomorphisme

5) Soit la suite $(x_n=n)_{n\in\mathbb{N}}$,montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R},d)$ mais elle ne l'est pas dans $(\mathbb{R},|.|)$

6) Montrer que $\mathbb{R}$ muni de la distance d n'est pas complet. Les deux distances sont-elles topologiquement équivalentes?
sont-elles métriquement équivalentes ?

Le Corrigé

Exercice 1 07pts

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la topologie induite par la distance usuelle

1) 03.5 pts Définitions: E un espace topologique, $A \subset E$ int$A = \underset{O \subset A}{\cup} O$ $\overline{A} = \underset{A \subset F}{\cap} F$

$\partial A = \overline{A} \cap \overline{C_A^E}$ où O (ouvert)$\in \tau$ F est fermé.

l'intérieur, la fermeture et la frontière des parties

ensemble	*intérieur*	*fermeture*	*frontière*
$\{0\}$	$\varnothing$	$\{0\}$	$\{0\}$
$\mathbb{Q}$	$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$[-1,2]$	$]-1,2[$	$[-1,2]$	$\{-1,2\}$
$]-\infty,0]$	$]\infty,0[$	$]-\infty,0]$	$\{0\}$

2) 0.75 pt Comme f est continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ alors l'image réciproque d'un fermé est fermée

a) 0.5 pt $A = \{x \in \mathbb{R} / \ f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ est fermé. puisque $\{0\}$ est fermé .

b) 01 pt Si $f = 0$ sur $\mathbb{Q}$ alors $\mathbb{Q} \subset f^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}$ il s'ensuit $\bar{\mathbb{Q}} \subset f^{-1}(\{0\})$ (puisque $f^{-1}(\{0\})$ est fermé.)
On déduit $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$ ie $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

c) 0.75 pt $B = f([-1,2])$ l'image d'un compact par une application continue est compacte

0.5 pt $\overline{f(\mathbb{Q})}$ est fermé et non nécessairement borné dans $\mathbb{R}$ donc non compact

si f est bornée $\exists M \succ 0 :$ $\overline{f(\mathbb{Q})} \subset$ $f(\mathbb{R}) \subset [-M, M]$ $alors$ $\overline{f(\mathbb{Q})}$ est fermé et borné donc compact.

Exercice 2: 06 pts

(E,d) un espace métrique complet et A une partie de E

1) **03 pts** Q.C : A est fermée ssi $\forall$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset$ A et $lim_{n\to+\infty} x_n = a$ $\Rightarrow a \in A$

2) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ $A_n = \underset{x\in A}{\cup} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$,

0.25 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $A \subset \underset{x\in A}{\cup} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$: donc A_n contient A

0.25pt A_n est ouvert car c'est la réunion dénombrable de boules ouvertes
.

3) 0.25 a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $A \subset A_n$ alors $A \subset \underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cap} A_n = F$

0.75 b) $\forall a \in F \Rightarrow a \in \underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cap} A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a \in A_n \Rightarrow$ $\exists (x_n)_n \subset A$ tels que $a \in \underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cap} B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$

0.75 c) $\forall a \in \bar{A}$ $\exists (x_n)_n \subset A$: $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a \in B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subset A_n$ $\Rightarrow a \in \cap A_n = F.$

0.25 $\bar{A} \subset F$ on déduit que $F = \bar{A}$

0.25 d) On déduit que la partie F est fermée et elle est égale à l'intersection infinie (dénombrable) d'ouverts

0.25 conclusion : L' intersection quelconque d'ouverts n'est pas toujours un ouvert

Exercice 3: 07pts

1) $f:\ \mathbb{R}\rightarrow\left]-1,1\right[$ telle que $f\left(x\right)=\frac{x}{2+|x|}$,soit $y=f\left(x\right)$,

0.5 si $0\leq$ y = $\frac{x}{2+|x|}$ alors $x\geq0$ ainsi y = $\frac{x}{2+x}$ d'où $x=2y+xy$ alors $x=\frac{2y}{1-y}$

0.5 si $0\geq$ y = $\frac{x}{2+|x|}$ alors $x\leq0$ ainsi y = $\frac{x}{2-x}$ d'où $x=2y-xy=\frac{2y}{1+y}$

0.25 Ainsi $\forall\ y\in\left]-1,1\right[\ \exists!x=\frac{2y}{1-|y|}\in\mathbb{R}/\ y=\ f\left(x\right)$

alors f est bijective

2) d :$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ $d\left(x,y\right)=\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$, est une distance sur $\mathbb{R}$,en effet,

0.5 *$\forall x,y\in\mathbb{R}\ d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$

0.5 $*\forall x,y\in\mathbb{R}\quad d\left(x,y\right)=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=f\left(y\right)\Rightarrow x=y$ car f est injective.

0..5..*$\forall x,y,z\in\mathbb{R}\ \ d\left(x,z\right)==\left|f\left(x\right)-f\left(z\right)\right|=\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)+f\left(y\right)-f\left(z\right)\right|\leq\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|+\left|f\left(y\right)-f\left(z\right)\right|=d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$

3) :01pt $f\left(\mathbb{R},|.|\right)\rightarrow\left(\mathbb{R},d\right)$ $f\left(x\right)=\frac{x}{2+|x|}=\begin{cases}\frac{x}{2+x} & \text{si x}\geq0\\ \frac{x}{2-x} & \text{si x}\leq0\end{cases}$ $\lim_{x\rightarrow0}f\left(x\right)=f\left(0\right)=0$

$f^{-1}\left(x\right)=\frac{2x}{1-|x|}=\begin{cases}\frac{2x}{1-x} & \text{si x}\geq0\\ \frac{2x}{1+x} & \text{si x}\leq0\end{cases}$ $\mathrm{im}_{x\rightarrow0}f^{-1}\left(x\right)=f^{-1}\left(0\right)=0$

les deux fonctions sont des fractions rationnelles donc continues alors f est un homéomorphisme ,

4) 01pt id :$\left(\mathbb{R},|.|\right)\rightarrow\left(\mathbb{R},d\right)$ est un homéomorphisme en effet

f est continue de $\left(\mathbb{R},|.|\right)$ vers $\left(\left]-1,1\right[,|.|\right)\Longleftrightarrow\forall x,y\in\mathbb{R}\ \ \forall\varepsilon\succ0\ \exists\delta_{\varepsilon}\succ0/\ \ |x-y|\leq\delta_{\varepsilon}\Rightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq\varepsilon$

$\Longleftrightarrow\forall x,y\in\mathbb{R}\ \ \forall\varepsilon\succ0$

$\exists\delta_{\varepsilon}\succ0/\ |x-y|\leq\delta_{\varepsilon}\Rightarrow d\left(x,y\right)\leq\varepsilon$

et c'est exactement la définition la continuité de l' application id de $\left(\mathbb{R},|.|\right)$ vers $\left(\mathbb{R},d\right)$

f^{-1} est continue de $\left(\left]-1,1\right[,|.|\right)$ vers $\left(\mathbb{R},|.|\right)$ $\Rightarrow\forall x,y\in\mathbb{R}\ \ \forall\varepsilon\succ0\ \exists\delta_{\varepsilon}\succ0/\ \left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq\delta_{\varepsilon}\Rightarrow|x-y|\ \leq\varepsilon$

$\Longleftrightarrow\forall x,y\in\mathbb{R}\ \ \forall\varepsilon\succ0$

$\exists\delta_{\varepsilon}\succ0/d\left(x,y\right)\ \leq\delta_{\varepsilon}\Rightarrow|x-y|\leq\varepsilon$

et c'est la définition la continuité de l' application id^{-1}

Enfin id est un homéomorphisme $\left(\mathbb{R},|.|\right)$ vers$\left(\mathbb{R},d\right)$

5) 01,25 pts La suite $\left(x_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\left(\mathbb{R},d\right)$ en effet

$\forall n\succ m\quad d\left(x_{n},x_{m}\right)=\left|\frac{n}{2+n}-\frac{m}{2+m}\right|=2\left|\frac{n-m}{(2+n)(2+m)}\right|\leq2\frac{n}{nm}\leq\frac{2}{m}\leq\varepsilon\quad\forall m\geq\frac{2}{\varepsilon}$

Ainsi $\forall\varepsilon\succ0\ \ \exists N_{\varepsilon}=\left[\frac{2}{\varepsilon}+1\right]\in\mathbb{N},\ \ /\ \ n\succ m\geq N_{\varepsilon}\Rightarrow\ d\left(x_{n},x_{m}\right)\leq\varepsilon$

Par contre $\forall n,m\in\mathbb{N}^{*}$ si $n\neq m\ \Rightarrow\ \ |n-m|\geq1\succ\frac{1}{2}$ autrement dit

$\exists\varepsilon=\frac{1}{2}\quad\forall N\in\mathbb{N}^{*}\ \ n\succ m\ \geq N\ et\quad|n-m|\geq\varepsilon$

donc $\left(x_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est de Cauchy dans $\left(\mathbb{R},|.|\right)$

(ou bien : Dans $\left(\mathbb{R},|.|\right)$ $\left(x_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$n'est pas bornée donc divergente alors elle n'est pas de Cauchy)

6) 01.25 pts $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$n'est pas convergente dans $(\mathbb{R}, d)$,en effet, supposons par absurde que $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$ alors
$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, l) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n}{2+n} - \frac{l}{2+l}\right| = 0$ on obtient ;$\frac{l}{2+l} = 1$ impossible!
Alors $\mathbb{R}$ muni de cette distance n'est pas complet..
Conclusion: Comme l'application id est un homéomorphisme entre $(\mathbb{R}, d)$ et $(\mathbb{R}, |.|)$ alors les deux distances sont topologiquement équivalentes , elles ne sont pas métriquement équivalentes puisque $(\mathbb{R}, |.|)$est complet mais $(\mathbb{R}, d)$n'est pas complet.

Z.Nedjraoui