Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen — **2019-2020**
Département de Mathématiques — **Examen final**
Module: Analyse numérique 1 — **Durée: 1h30**

Exercice 1 :
1) Construire le polynôme de Lagrange P qui interpole les trois points

$$(-1, e),\ (0, 1),\ (1, e).$$

2) Sans faire de calculs, donner l'expression du polynôme de Lagrange Q qui interpole les trois points

$$(-1, -1),\ (0, 0),\ (1, -1).$$

Exercice 2 : On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$$

1) Évaluer cette intégrale par la méthode des trapèzes avec $n = 3$ sous-intervalles.
2) Pourquoi la valeur obtenue à la question précédente est-elle supérieure à la valeur exacte ? Est-ce vrai quelque soit n ? Justifier la réponse. (On pourra s'aider par un dessin.)

Exercice 3 : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = exp(x^2) - 4x^2.$$

On se propose de trouver les racines réelles de f.
1) Situer les 4 racines de f
(i.e. indiquer 4 intervalles disjoints qui contiennent chacun une et une seule racine).
2) Montrer qu'il y a une racine α comprise entre 0 et 1.
3) Soit la méthode de point fixe

$$(1) \begin{cases} x_0 \in]0, 1[\\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

avec g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{\sqrt{exp(x^2)}}{2}.$$

Examiner la convergence de cette méthode et en préciser l'ordre de convergence.
4) Écrire la méthode de Newton pour la recherche des zéros de la fonction f.
5) Entre la méthode de Newton et la méthode de point fixe (1), quelle est la plus efficace ? Justifier la réponse.

Correction 1pt presentation

Exercice 1 :

4pt 1) **Théorème :** Etant donné $n+1$ points distincts (x_i, y_i), il existe un unique polynôme $P_n(x) \in R_n[x]$ telle que $P(x_i) = y_i$ pour $i = 0, ..., n$ qui s'écrit sous forme

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_n L_n(x)$$

$$\text{où} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$ 1

On cherche le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par $(-1, e),\ (0, 1),\ (1, e)$.

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)\ (x-x_2)}{(x_0-x_1)\ (x_0-x_2)} = \frac{(x-0)\ (x-1)}{(-1-0)\ (-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2} \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)\ (x-x_2)}{(x_1-x_0)\ (x_1-x_2)} = \frac{(x+1)\ (x-1)}{(0+1)\ (0-1)} = 1 - x^2 \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)\ (x-x_1)}{(x_2-x_0)\ (x_2-x_1)} = \frac{(x+1)\ (x-0)}{(1+1)\ (1-0)} = \frac{x(x+1)}{2}
\end{aligned}$$ 1.5

Donc le polynôme d'interpolation de Lagrange est

$$P_2(x) = e \times L_0(x) + 1 \times L_1(x) + e \times L_2(x) = (e-1)x^2 + 1$$ 0.5

2) Sans faire de calculs, le polynôme de Lagrange qui passe par $(-1, -1),\ (0, 0),\ (1, -1)$. est

$$Q_2(x) = -1 \times L_0(x) + 0 \times L_1(x) + -1 \times L_2(x) = -x^2$$ 1

3pt **Exercice 2** : On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$$

1) La méthode des trapèzes à n points pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur $[a; b]$ s'écrit

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\Big) \quad \text{avec} \quad h = \frac{b-a}{n}$$ 1

La méthode des trapèzes à 3 points pour calculer l'intégrale d'une fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $[1, 2]$ avec $h = \frac{1}{3}$ s'écrit

$$I = \int_1^2 \frac{1}{t} dt \approx \frac{1}{6}\Big(f(1) + 2f(1+1/3) + 2f(1+2/3) + f(2)\Big) = \frac{1}{6}\Big(1 + \frac{3}{2} + \frac{6}{5} + \frac{1}{2}\Big) = 0.7$$ 1

2) La valeur de I obtenue par la méthode des trapèzes est supérieure à la valeur exacte $I = \left[ln(t)\right]_1^2 = ln(2)$ car la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $[1, 2]$ est convexe. L'aire sous les trapèzes sera donc supérieure à l'aire sous la courbe. 1

Exercice 3 : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \exp(x^2) - 4x^2.$$

On se propose de trouver les racines réelles de f.

1) On a $f'(x) = 2x\exp(x^2) - 8x$. Donc $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = \sqrt{ln(4)}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{ln(4)}$		0		$\sqrt{ln(4)}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$4(1 - ln(4))$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$4(1 - ln(4))$	$\nearrow$	$+\infty$

1

On a
- une racine dans l'intervalle $]-\infty; -\sqrt{ln(4)}[$,
- une racine dans l'intervalle $]-\sqrt{ln(4)}; 0[$, 2
- une racine dans l'intervalle $]0; \sqrt{ln(4)}[$,
- une racine dans l'intervalle $]\sqrt{ln(4)}; +\infty[$.

2) **Théorème des valeur intermediaires :**
Soit une fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
1) $f(a)f(b) < 0$ 1
2) f monotone
alors il existe un unique $x_* \in]a, b[: f(x_*) = 0$. Puisque $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = e - 4 < 0$ et $f'(x) = 2x\exp(x^2) - 8x < 2xe - 8 < 0 \quad \forall x \in]0, 1[$. 1
Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $x_* \in]0, 1[: f(x_*) = 0$.
3) Soit la méthode de point fixe

$$(1)\begin{cases} x_0 \in]0, 1[\\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

avec g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2}.$$

On vérifie

$$x_* = g(x_*) \iff 2x_* = \sqrt{\exp(x^2)} \iff 4x_*^2 = \exp(x^2) \iff f(x_*) = 0$$ 1

La convergence de cette méthode

L'application g est croissante car $\forall x \in [0,1] : g'(x) = \dfrac{x\sqrt{\exp(x^2)}}{2} \geq 0.$ 1

condition(1) : $\forall x \in [0,1]$ on a

$$0 < \frac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2} \leq \frac{\sqrt{\exp(1)}}{2} < 1 \qquad 1$$

Donc $g([0,1]) \subset [0,1]$.

condition(2) $|g'(x)| = \left|\dfrac{x\sqrt{\exp(x^2)}}{2}\right| \leq \dfrac{\sqrt{\exp(x^2)}}{2} \leq \dfrac{\sqrt{\exp(1)}}{2} < 1 \ \forall x \in [0,1]$ 1

Donc $g : [0,1] \to [0,1]$ est de C^1 tel que $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [0,1]$.

L'ordre de convergence est 1 car : $g'(x_*) = x_* g(x_*) = x_*^2 \neq 0.$ 1

4) La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Donc

$$(1) \begin{cases} x_0 \in]0,1[\\ x_{n+1} = x - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{\exp(x_n^2) - 4x_n^2}{2x_n(\exp(x_n^2) - 4)} \end{cases} \qquad 1$$

5) La méthode de Newton converge à l'ordre 2 tandis que la méthode de point fixe (1) converge seulement à l'ordre 1 : la méthode de Newton est donc plus efficace.

1