Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L2 MATH   Topologie   **05/02/20**

Epreuve Finale (Durée 01h30)

Exercice1: 07pts

1)Soit (E, τ) un espace topologique

a)Montrer que toute partie compacte de E est fermée

b)Donner un exemple de partie fermée qui n'est pas compacte

c) Montrer que si E est compact alors toute partie fermée de E est compacte

2) Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E.

On pose $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $l \in A^c = C_A^E$

a) Montrer que $l \in \bar{A}$ si et seulement si l est une valeur d'adhérence pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une seule valeur d'adhérence l et $U = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$

Montrer que U est compact si et seulement si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$est convergente.

Exercice 2: 09pts I.

Soit (E, d) un espace métrique et F un ensemble. On définit l'application $d_\varphi : F \times F \to \mathbb{R}^+$ telle que :

$\forall x, y \in F \;\; d_\varphi(x, y) = d(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))$ où φ: $E \to F$ est une bijection

a) Montrer que d_φ définit une distance sur F

b) Montrer que φ est une isométrie de(E, d) sur (F, d_φ)

II.

On considère E=$]-1, 1[$ et $\mathbb{R}$ munis de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$

a) Montrer que (E, d) n'est pas complet

b) Montrer que l'application $\varphi : (\mathbb{R}, d) \to (]-1, 1[, d)$ telle que $\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$ est un homéomophisme et $\varphi : (\mathbb{R}, d) \to (]-1, 1[, d_\varphi)$, est une isométrie

c) En déduire que l'identité est un homéomophisme de $(]-1, 1[, d)$ $vers$ $(]-1, 1[, d_\varphi)$

d)Montrer que toute suite de Cauchy dans $(]-1, 1[, d_\varphi)$ est convergente dans $]-1, 1[$

e) En déduire que les distances $d_\varphi$et d sont topologiquement équivalentes mais ne sont pas métriquement équivalentes.

Exercice 3 04 pts Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, f et g deux applications continues de (E, d) vers (F, δ)

1) Montrer que $A = \{x \in E, \; f(x) \neq g(x)\}$est ouvert

2) Montrer que si A est dense dans E alors A^C ne peut pas être également dense dans E

Corrigé

Exercice1

1)(03.5pts)

a) et c) voir cours

b)Un exemple de partie fermée qui n'est pas compacte: Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $[a,+\infty[$ (ou $]-\infty,a]$) où $a\in\mathbb{R}$, est une partie fermée mais non bornée alors non compacte

2)(04pts)

(E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E $A=\{x_n,n\in\mathbb{N}\}$ et $l\in A^c=C_A^E$

a)" $\Rightarrow$ "

$l\in\bar{A}\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall V\in\mathcal{V}(l)\quad V\cap A\neq\varnothing$, comme A est infinie alors: $\forall V\in\mathcal{V}(l)\ \forall m\in\mathbb{N}:\exists n\geq m:x_n\in V$

$Soit\ \varepsilon\succ 0$,en posant V=$B(l,\varepsilon)$,on obtient: $\forall\varepsilon\succ 0\ \forall m\in\mathbb{N}:\exists n\geq m:d(x_n,l)\leq\varepsilon$ alors l est une valeur d'adhérence pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

" $\Leftarrow$ "

l est une valeur d'adhérence pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall\varepsilon\succ 0\ \forall m\in\mathbb{N}:\exists n\geq m:$ $d(x_n,l)\leq\varepsilon\Rightarrow\forall\varepsilon\succ 0\ B(l,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$

comme tout voisinage de l contient une $B(l,\varepsilon)$ ($\varepsilon\succ 0$) alors $\forall V\in\mathcal{V}(l)\quad V\cap A\neq\varnothing$ c a.d. $l\in\bar{A}$

b) On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une seule valeur d'adhérence l et $U=\{x_n,n\in\mathbb{N}\}\cup\{l\}$

On montre que U est compact si et seulement si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$est convergente.

" $\Rightarrow$ "

U est compact$\Rightarrow$la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on peut extraire une sous-suite convergente et comme l est l'unique valeur d'adhérence alors c'est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $ainsi$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$est convergente.

" $\Leftarrow$ "

Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$est convergente vers l$\in U$ $alors$ U est fermé

on déduit aussi que U est compact (d'aprés I.c :partie fermée d'un compact)) puisque U $\subset\bar{B}(l,\rho)$ où

$\rho=\delta(U)=\sup\{d(x,y):(x,y)\in U\}$ ρ est fini car la suite$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2: 09pts I.(02.5pts)

(E,d) un espace métrique et F un ensemble. $d_\varphi:F\times F\to\mathbb{R}^+$ telle que :

$\forall x,y\in F\ \ d_\varphi(x,y)=d(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y))$ où φ:$E\to F$ est une bijection

a) d_φ définit bien une distance sur F,en effet ,comme d est une distance alors:

* $\forall x,y\in F\ \ d_{\varphi}(x,y)=d\left(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y)\right)\geq 0$
*(l'identité)$\forall x,y\in F\ \ d_{\varphi}(x,y)=0\Longleftrightarrow d\left(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y)\right)=0\Leftrightarrow x=y$
*(symétrie)$\forall x,y\in F\ \ d_{\varphi}(x,y)=d\left(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y)\right)=d\left(\varphi^{-1}(y),\varphi^{-1}(x)\right)=d_{\varphi}(x,y)$
*(l'inégalité triangulaire)$\forall x,y,z\in F\ \ d_{\varphi}(x,z)=d\left(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(z)\right)\leq d\left(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y)\right)+d\left(\varphi^{-1}(y),\varphi^{-1}(z)\right)$
alors $\forall x,y,z\in F\ \ d_{\varphi}(x,z)\leq\ d_{\varphi}(x,y)+\ d_{\varphi}(y,z)$
b) φ est une isométrie de(E,d) sur $(F,d_{\varphi})\,car$ elle est bijective et vérifie:
$\forall x,y\in E\ \ d_{\varphi}(\varphi(x),\varphi(y))=d\left(\varphi^{-1}(\varphi(x)),\varphi^{-1}(\varphi(y))\right)=d(x,y)$
II.06,5pts
On considère E=$]-1,1[$ et $\mathbb{R}$ munis de la distance usuelle $d(x,y)=|x-y|$
a) (01pt) (E,d) n'est pas complet car il suffit de prendre la suite: $x_n=1-\frac{1}{n}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subset E$ et elle est de Cauchy,en effet
pour $\forall\varepsilon\succ 0\ \exists N_{\varepsilon}\ \in\mathbb{N}\ \ \forall n,m\in\mathbb{N}\quad n\succ m\geq\left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]\qquad |x_n-x_m|=\frac{n-m}{nm}=\frac{1-\frac{m}{n}}{m}\leq\frac{1}{m}\leq\varepsilon$
$\lim_{n\to+\infty}x_n=1\notin E$
b) (02)L'application $\varphi:(\mathbb{R},d)\to(]-1,1[\,,d_{\varphi})$ telle que $\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\arctan x$
est bijective et $\varphi^{-1}(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
$\forall x,y\in\mathbb{R}\quad d_{\varphi}(\varphi(x),\varphi(y))=|\varphi^{-1}(\varphi(x))-\varphi^{-1}(\varphi(y))|=|x-y|$
$\forall\varepsilon\succ 0\quad\forall x,y\in\mathbb{R}\quad\exists\delta_{\varepsilon}\succ 0\quad |x-y|\leq\delta_{\varepsilon}\quad d_{\varphi}(\varphi(x),\varphi(y))=|x-y|\ \leq\varepsilon$ il suffit de prendre $\delta_{\varepsilon}=\varepsilon$
donc φ est continue
$\forall x,y\in\,]-1,1[\quad d_{\varphi}(x,y)\ =\ |\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(y)|=d\left(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y)\right)$
$\forall\varepsilon\succ 0\quad\forall x,y\in\,]-1,1[\quad\exists\delta_{\varepsilon}\succ 0\quad d_{\varphi}(x,y)\ \leq\delta_{\varepsilon}\ \Rightarrow d\left(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y)\right)\leq\varepsilon$il suffit de prendre $\delta_{\varepsilon}=\varepsilon$
donc φ^{-1} est continue
Conclusion: φ est un homéomophisme
$\varphi:(\mathbb{R},d)\to(]-1,1[\,,d_{\varphi})$, est une isométrie d'aprés b)
c) (01pt) On déduit que l'identité est un homéomophisme de $(]-1,1[\,,d)\ vers$ $(]-1,1[\,,d_{\varphi})$ comme composée de deux homéomophismes car $id=\varphi o\varphi^{-1}$
$(]-1,1[\,,d)\xrightarrow{\varphi^{-1}}(\mathbb{R},d)\xrightarrow{\varphi}(]-1,1[\,,d_{\varphi})$
d)(01,5pts)Toute suite de Cauchy dans $(]-1,1[\,,d_{\varphi})$ est convergente dans $]-1,1[$ en effet,
$d_{\varphi}(x_n,x_m)=d\left(\varphi^{-1}(x_n)-\varphi^{-1}(x_m)\right)$ ainsi si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(]-1,1[\,,d_{\varphi})$ alors $\left(\varphi^{-1}(x_n)\right)_n$ sera une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R},d)$,et comme $(\mathbb{R},d)$ est complet elle est convergente vers une limite l$\in\mathbb{R}$ d'où $\varphi(l)\in\,]-1,1[$ Grâce à la continuité de φ et de $\varphi^{-1},\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\varphi\left(\varphi^{-1}(x_n)\right)=\varphi(l)$
Conclusion $(]-1,1[\,,d_{\varphi})$ est complet.
e)(01pt) Puisque l'identité est un homéomophisme de $(]-1,1[\,,d)\ vers\ (]-1,1[\,,d_{\varphi})$ alors les distances d_{φ}et d sont topologiquement équivalentes , elles ne sont pas métriquement équivalentes.car $(]-1,1[\,,d)$n'est pas complet et $(]-1,1[\,,d_{\varphi})$ est complet.

Exercice 3 04 pts

(E,d) et (F,δ) sont deux espaces métriques,f et ,$g\ \ sont$ deux applications continues de (E,d) vers (F,δ)

1) (03pts) Montrons que $A=\{x\in E,\ f(x)\neq g(x)\}$est ouvert

Soit $x_0\in A,\ f(x_0)\neq g(x_0)$ alors $\exists\beta\succ 0:\delta(f(x_0),g(x_0))=\beta$
f est continue au point x_0 alors (*)$\forall\varepsilon\succ 0\quad\forall x\in E\quad\exists\delta_\varepsilon\succ 0\quad d(x,x_0)\leq\delta_\varepsilon\Rightarrow\delta(f(x_0),f(x))\leq\varepsilon$
en particu lier (*) est vraie pour $\varepsilon=\frac{\beta}{3}$
g est continue au point x_0 alors (**)$\forall\varepsilon\succ 0\quad\forall x\in E\quad\exists\delta'_\varepsilon\succ 0\quad d(x,x_0)\leq\delta'_\varepsilon\Rightarrow\delta(g(x_0),g(x))\leq\varepsilon$
en particu lier (**) est vraie pour $\varepsilon=\frac{\beta}{3}$
Alors
$\forall\varepsilon\succ 0\quad\forall x\in E\quad d(x,x_0)\leq\alpha=\min(\delta_\varepsilon,\delta'_\varepsilon)\Rightarrow\delta(f(x_0),g(x_0))\leq\delta(f(x_0),f(x))+\delta(f(x),g(x))+\delta(g(x),g(x_0))$
alors $\delta(f(x),g(x))\geq\beta-\frac{2\beta}{3}=\frac{\beta}{3}\Rightarrow f(x)\neq g(x)$
Ainsi $\forall x_0\in A\quad B(x_0,\alpha)\subset A$,c.a.d A est ouvert
2) (01pt) A est ouvert dans E alors A^Cest fermé d'où $\overline{A^C}=A^C$.
*S*i A est dense $\bar{A}$=E alors
A^C ne peut pas être également dense dans E car on aura $A^C=$ E $=\bar{A}$ donc A $\subset A^C$ce qui est impossible !