Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **2019-2020**
Département de Mathématiques **Examen final**
Module: Analyse numérique 1 **Durée: 1h30**

Exercice 1 : Soit la suite

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n(u_n^2+3)}{3u_n^2+1}, \qquad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers 1. Quel est l'ordre de convergence ?

Exercice 2 : Soit la fonction

$$f(x) = \sin(\pi x).$$

1) Calculer l'approximation de $f(\frac{2}{3})$ (préciser l'erreur comise) en utilisant
 a) le développement de Taylor de degré 3 de f autour de $x_0 = 0$.
 b) le polynôme de Newton qui interpole f aux noeuds 0, 1/4, 3/4 et 1.
Comparer les deux approximations de $f(\frac{2}{3})$ avec la valeur exacte.

2) Calculer l'approximation de $f'(\frac{2}{3})$ en utilisant
 a) le polynôme de Taylor.
 b) le polynôme de Newton.
 c) la formule centrée avec $h = 1/6$.
Comparer les trois approximations de $f'(\frac{2}{3})$ avec la valeur exacte.

3)Quelle est la méthode d'approximation la plus précise. Justifier votre réponse.

Exercice 3 : On considère l'équation

$$x(1+e^x) = e^x.$$

1) Montrer que cette équation admet une unique solution réelle x_* dans [0,1].
2) Écrire la méthode de Newton pour approcher la solution x_*.
3) Proposer une autre méthode de point fixe pour approcher x_*. Justifier votre réponse.
4) Calculer l'ordre de convergence de la méthode de point fixe.
(indication : la pécision $\varepsilon = 10^{-3}$).

Correction

Exercice 1 : Soit la suite

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n(u_n^2+3)}{3u_n^2+1}, \qquad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Montrons que la suite $(u_n)_n$ converge vers 1.

1 **Méthode1 (1ère année)** : $(u_n)_n$ est croissante et majorée par 1, $\underset{n\to\infty}{lim} u_{n+1} = \underset{n\to\infty}{lim} u_n = 1$

Méthode2 : (point fixe) On choisit $g(x) = \dfrac{x(x^2+3)}{3x^2+1}$ sur $[0,1]$ alors $g'(x) = \dfrac{3(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2}$

condition(2) on montre facilement que $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [0,1]$

condition(1) g est une fonction continue et croissante alors $g([0,1]) = [g(0), g(1)] = [0,1]$

Donc $g : [0,1] \to [0,1]$ est de C^1 tel que $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [0,1]$. Doncd'après le théorème du point fixe la suite $(u_n)_n$ converge pour tout $x_0 \in [0,1]$ de plus $\underset{n\to\infty}{lim} u_{n+1} = \underset{n\to\infty}{lim} u_n = 1$.

Méthode1 : l'ordre de convergence est 3 car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

1

$$\underset{n\to\infty}{lim} \frac{|u_{n+1}-1|}{|u_n-1|^p} = \underset{n\to\infty}{lim} \frac{|(u_n-1)^3|}{|3u_n^2+1|} \times \frac{1}{|u_n-1|^p} = \underset{n\to\infty}{lim} \frac{1}{|3u_n^2+1|} = \frac{1}{4} > 0 \quad \text{pour } p = 3$$

Méthode2 : l'ordre de convergence est 3 car $g'(1) = 0$, $g''(1) = 0$ et $g^{(3)}(1) \neq 0$

$$g'(x) = \frac{3(x^2-1)^2}{(3x^2+1)^2} \quad g''(x) = \frac{48x(x^2-1)}{(3x^2+1)^3} \quad g^{(3)}(x) = -48 \times \frac{9x^4+18x^2-1}{(3x^2+1)^4}$$

Exercice 2 : Soit la fonction $f(x) = \sin(\pi x)$.

1) Calculer l'approximation de $f(\frac{2}{3})$ (préciser l'erreur comise) en utilisant

a) Le polynôme de Taylor de $\sin(\pi x)$ de degré 3 s'écrit

1 $$DT(x) = \pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} \quad \text{Alors} \quad f\Big(\frac{2}{3}\Big) \approx \pi\frac{2}{3} - \frac{4}{81}\pi^3 = 0.5632209453413526$$

0.5 L' erreur est $E = \left|\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^4 \pi^4\right| \leq \dfrac{1}{24}\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^4 \pi^4 = 0.79875 \quad$ pour $\xi \in [0, \dfrac{2}{3}]$

b) le polynôme de Newton qui interpole f aux noeuds 0, 1/4, 3/4 et 1.

0.5 $P_3(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$
$+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & \boxed{0} & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \boxed{2\sqrt{2}} & & \\
\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \boxed{-\frac{8\sqrt{2}}{3}} & \\
1 & 0 & -2\sqrt{2} & -\frac{8\sqrt{2}}{3} & \boxed{0}
\end{array}$$

0.5

$$P_3(x) = 2\sqrt{2}x - \frac{8}{3}\sqrt{2}x(x-\frac{1}{4}) = -\frac{8}{3}\sqrt{2}\, x\,\Big(x-1\Big)$$

0.5 L' erreur est $E(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x-\dfrac{1}{4})(x-\dfrac{3}{4})(x-1)$

0.5 $f\Big(\dfrac{2}{3}\Big) \approx P_3\Big(\dfrac{2}{3}\Big) = 0.8380524814062786$

$$\left|E\Big(\frac{2}{3}\Big)\right| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-\frac{1}{4})(\frac{2}{3}-\frac{3}{4})(\frac{2}{3}-1)\right| \leq 0.0292$$

0.5

1 Comparaison : $f(\frac{2}{3}) = 0.86602540$. l'approximation de Newton est plus précise.
2) Calculer l'approximation de $f'(\frac{2}{3})$ en utilisant

1 a) le polynôme de Taylor. $DT'(x) = \pi - \dfrac{(\pi)^3 x^2}{2}$ alors $DT'(\frac{2}{3}) = -3.7486910531434994$

1 b) le polynôme de Newton. $P_3'(x) = -\dfrac{8}{3}\sqrt{2}\Big(2x-1\Big)$ alors $P_3'(\frac{2}{3}) = -1.2570787221094177$

c) la formule centrée avec $h = 1/6$.

1

$$f_c'(\frac{2}{3}) = \frac{f(\frac{2}{3}+h) - f(\frac{2}{3}+h)}{2h} = 3f(\frac{5}{6}) - f(\frac{3}{6}) = 3\Big(\sin\Big(\frac{5\pi}{6}\Big) - \sin\Big(\frac{3\pi}{6}\Big)\Big) = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Comparaison : $f'(\frac{2}{3}) = \pi\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2} = 1.5707963267948966$.
1 L'approximation de la formule centrée est plus précise .
3) L'approximation de Newton est plus précise pour calculer $f(\frac{2}{3})$ que celle de Taylor. Ceci est
1 dû au fait que $\frac{2}{3}$ trop éloigné de 0, mais proche du nœud d'interpolation $\frac{3}{4}$. L'approximation de la formule centrée pour calculer $f(\frac{2}{3})$ est plus précise par ce qu' on a négligé le reste de Taylor et l'erreur d'interpolation.

Exercice 3 : On considère l'équation $x(1+e^x) = e^x$.
1) L'équation admet une unique solution réelle x_* dans [0,1].
1,5 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(1+e^x) - e^x$. f est continue, $f(0)f(1) < 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaire, la fonction f admet au moins une racine sur $[0,1]$. De plus, f est monotone sur $[0;1]$ (car$f\prime(x) = 1 + xe^x > 0 \forall x \in [0;1]$), donc la racine est unique.
2) Écrire la méthode de Newton pour approcher la solution x_*.

1,5

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1] \quad \text{voisinage de la solution} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n(1+e_n^x) - e_n^x}{1 + x_n e_n^x} = \dfrac{(x_n^2 - x_n + 1)}{1 + x_n e_n^x} e_n^x \end{cases}$$

3) Autre méthode de point fixe pour approcher x_*.

0.5

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1] \\ x_{n+1} = \dfrac{e_n^x}{1 + e_n^x} \end{cases}$$

1

On choisit $g(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ sur $[0,1]$ alors $g'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ **condition(2)** on montre facilement que $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [0,1]$

1 **condition(1)** g est continue et croissante alors $g([0,1]) = [g(0), g(1)] = \left[\frac{1}{2}, \frac{e}{1+e}\right] \subset [0,1]$
0.5 Donc $g : [0,1] \to [0,1]$ est de C^1 tel que $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [0,1]$. Doncd'après le théorème du point fixe la suite $(x_n)_n$ converge pour tout $x_0 \in [0,1]$.
4) l'ordre de convergence est 1 car

1

$$g'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \neq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$