Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Analyse 3* - Examen Final.
Jeudi 06/02/2020 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (06pts) Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1. Déterminer son développement en série entière centrée en 0. (Indication : on pourra commencer par développer sa dérivée f')
2. Déterminer le rayon de convergence de la série de f.
3. En déduire la somme S de la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\ 4^{2k+1}}$.

Exercice 2 : (08pts) On considère la fonction g qui est 2π-périodique et telle que sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ on ait $g(x) = x\left(\pi^2 - x^2\right)$.

1. Tracer le graphe de g sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de g. Peut-on affirmer que la somme de cette série de Fourier est $g(x)$ pour tout x ? Justifier.
3. En déduire la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.
4. A l'aide de l'identité de Plancherel, déterminer la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6}$.

Exercice 3 : (06pts) Soit $a > 0$ un paramètre. On considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\, dt$$

.

1. Montrer que I_a est convergente.
2. A l'aide du changement de variable $t = 1/s$, montrer que $I_1 = 0$.
3. Enfin à l'aide du changement $t = au$, calculer I_a.

$2^{ème}$ année de Licence "Mathématiques" - 2019/2020.

Module : "Analyse III" - Epreuve Finale - Corrigé

Exercice 1 : (06pts) $\quad f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

1/ Développement de f : Calculons f'.

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{1+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2+(1-x^2)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2x}{1+x^4}}$$

Le développement en série entière centrée en 0 de f' est immédiat 1pt

$$f'(x) = (-2x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^4)^n = (-2)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{4n+1}$$

Ce développement ayant pour rayon de convergence 1, est valable dans l'intervalle $]-1,1[$. D'après les propriétés des séries entières on peut intégrer terme à terme dans $]-1,1[$, d'où

$$f(x) = f(0) - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{4n+2}$$

Or $f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$; donc 1pt

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n+2}}{2n+1}}$$

2/ Le rayon est déjà 1 pour f' et donc 1 pour f aussi. Mais on peut le calculer de nouveau, en posant $x^4 = y$ et la série devient $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{y^n}{2n+1}$ (sans le x^2). Donc $C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ 2pts

d'où $\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \frac{2n+1}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ d'où $\boxed{R = 1}$

3°/ Calcul de S : $\quad S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,4^{2k+1}}$

On obtient S en prenant $x = 1/2$ dans la série de f.

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{2^{4k+2}}, \quad \text{or } 2^2 = 4$$

d'où $\quad S = \frac{\pi}{4} - f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1-1/4}{1+1/4}\right)$ 2pts

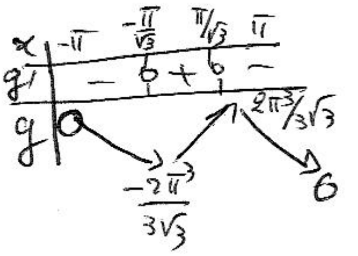
$$\boxed{S = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{5}\right)}$$

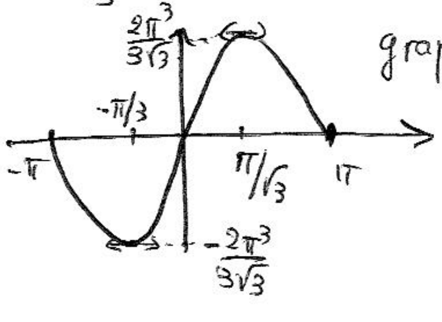
Exercice 2 : (08 pts) $\quad g(x) = x(\pi^2 - x^2), \ \forall x \in [-\pi, \pi]$

g est 2π-périodique.

1°/ Graphe de g dans $[-3\pi, 3\pi]$: Dans $[-\pi,\pi]$, $g'(x) = \pi^2 - 3x^2$

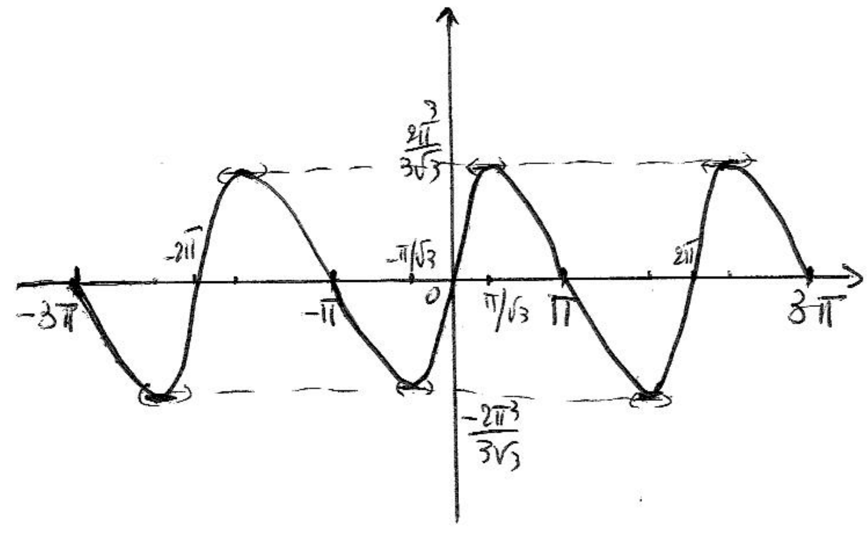
Signe de g' : $\quad$ sur $]-\pi, -\pi/\sqrt{3}[$: $-$; $\ -\pi/\sqrt{3}$: 0 ; $\ ]-\pi/\sqrt{3}, 0]$: $+$; $\ [0, \pi/\sqrt{3}[$: $+$; $\ \pi/\sqrt{3}$: 0 ; $\ ]\pi/\sqrt{3}, \pi[$: $-$





graphe sur $[-\pi, \pi]$.

2pts



2°/ Série de Fourier de g : g vérifie manifestement les conditions de Dirichlet. En plus g est impaire, donc les $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Calculons les b_n ($n \geq 1$) : $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx$

($g(x)\sin nx$ est paire), $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx\,dx$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi^2-x^2)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi^2-x^2)\,d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\overbrace{\cancel{\left[-x(\pi^2-x^2)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}}}^{0} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-3x^2)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-3x^2)\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left\{\overbrace{\cancel{\left[(\pi^2-3x^2)\sin nx\right]_0^{\pi}}}^{0} + \int_0^{\pi} 6x\sin nx\,dx\right\}$$

$$= \frac{12}{n^2\pi}\int_0^{\pi} x\,d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{12}{n^3\pi}\left\{\left[-x\cos nx\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right\}$$

$$= \frac{12}{\pi n^3}\left\{(-1)^{n+1}\pi + \overbrace{\cancel{\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}}}^{0}\right\} \; ; \; \boxed{b_n = 12\,\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}}$$

Comme tous les points sont des points de continuité de g alors la somme de sa série de Fourier est bien $g(x)$: 2pts

$$\boxed{g(x) = 12\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin nx.} \; , \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

3°/ Il suffit de prendre $x = \pi/2$. $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$

D'où $g(\pi/2) = 12\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2k+2}}{(2k+1)^3}\cdot(-1)^k = +12\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$

or $g(\pi/2) = \frac{\pi}{2}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{3\pi^3}{8}$ et donc 2pts

$$\boxed{\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = +\frac{\pi^3}{32}}$$

4% L'identité de Plancherel s'écrit :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2dx = 12^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} \quad (\text{car les } a_n=0)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2 = 2\int_0^{\pi}x^2(\pi^2-x^2)^2dx = 2\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)^2 d\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

$$= \cancel{\left[\frac{2}{3}x^3(\pi^2-x^2)^2\right]_0^{\pi}} + \frac{8}{3}\int_0^{\pi}x^4(\pi^2-x^2)dx$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\,d\left(\frac{x^5}{5}\right) = \frac{8}{3\cdot5}\cancel{\left[x^5(\pi^2-x^2)\right]_0^{\pi}} + \frac{16}{3\cdot5}\int_0^{\pi}x^6dx$$

$$= \frac{16}{3\cdot5\cdot7}\pi^7. \text{ D'où}$$

$$\boxed{\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^6} = \pi^6\frac{16}{3\cdot5\cdot7\cdot12^2} = \frac{\pi^6}{945}}$$

2pts

Exercice 3 : (06pts) $a>0$. $I_a=\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{a^2+t^2}dt$

1°/ Convergence de I_a : Notons $h(t)=\frac{\ln t}{a^2+t^2}$

. On a : $\lim_{t\to0^+}\sqrt{t}\,|h(t)| = \lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{t}\,|\ln t|}{a^2+t^2}=0$

d'où la convergence en 0, car dans $V(0)$, $|h(t)|\leq\frac{C_1}{\sqrt{t}}$.

. On a aussi $\lim_{t\to+\infty}t^{3/2}h(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{3/2}\ln t}{a^2+t^2} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t^{1/2}}=0$

et donc pour t assez grand, $0<h(t)\leq\frac{C_2}{t^{3/2}}$ d'où la conv. en $+\infty$.

2pts

2°/ $I_1=0$: $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt$, si $t=1/s$

$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{-\ln s}{1+\frac{1}{s^2}}\frac{1}{s^2}ds = -\int_0^{+\infty}\frac{\ln s}{1+s^2}ds = -I_1$$

d'où $2I_1=0 \Rightarrow \boxed{I_1=0}$

2pts

3°/ Calcul de I_a : $t = au$, d'où

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln u}{a^2 + a^2 u^2}\, a\, du$$

$$= \frac{1}{a}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\ln a}{1+u^2}\, du + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\, du}_{= I_1 = 0}\right]$$

$$= \frac{\ln a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{\ln a}{a} \Big[\operatorname{arctg} u\Big]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi \ln a}{2a}}$$