Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Analyse 3* - Rattrapage de l'Examen de Contrôle Continu.
Jeudi 23/01/2020 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (06pts) Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel $\alpha > 0$, la convergence de la série numérique de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}, \qquad n \geq 2.$$

Exercice 2 : (08pts) On considère la série de fonctions de terme général :

$$v_n(x) = (-1)^n \, \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right), \qquad x \geq 0 \quad n \geq 1.$$

1. Montrer que cette série est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer ensuite qu'elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$.
3. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 3 : (06pts) On considère $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ avec $n \geq 1$ et la série entière réelle $\sum a_n \, x^n$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière précédente.
3. Pour $x \in \,]-1, 1[$, posons $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \, x^n$. Montrer que $(1-x)\, F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
4. En déduire enfin l'expression de $F(x)$.

$2^{\text{ème}}$ année de Licence Mathématiques - 2019/2020.

Module : "Analyse III" - Rattrapage du Contrôle.

Corrigé.

Exercice 1 : (06pts). Etude suivant le paramètre $\alpha > 0$, de la convergence de la série numérique de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \quad , \quad n \geq 2.$$

On a déjà : $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right]^{-1/2}$ 1pt

Considérons la fonction $f(t) = (1+t)^{-1/2}$, et son développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3}{8} t^2 (1 + \theta_t t)^{-5/2}, \quad 0 < \theta_t < 1.$$ 2pts.

Ceci implique que :

$$\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right]^{-1/2} = 1 - \frac{(-1)^n}{2n^\alpha} + \frac{3}{8n^{2\alpha}} \left(1 + \tilde{\theta}_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right), \quad 0 < \tilde{\theta}_n < 1.$$

et donc $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + \frac{3(-1)^n}{8n^{5\alpha/2}} \left(1 + \tilde{\theta}_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-5/2}$.

On peut écrire : $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - v_n$ où $v_n = \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} - \frac{3(-1)^n}{8n^{5\alpha/2}} \left(1 + \tilde{\theta}_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-5/2}$ 1pts

Il est facile de voir que $\lim_{n \to +\infty} v_n \cdot n^{3\alpha/2} = 1/2 \neq 0$, donc par la règle de Riemann, la série de terme g$^{\text{al}}$ v_n est convergente si et ssi $3\alpha/2 > 1 \iff \alpha > 2/3$. Pour la série de terme g$^{\text{al}}$ $\frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}$ elle est convergente $\forall \alpha > 0$ par le critère d'Abel. 2pts

$$\boxed{\text{Donc la série } \sum u_n \text{ cvge si et ssi } \alpha > 2/3}$$

Exercice 2 : (08 pts). $v_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$, $x \geq 0$, $n \geq 1$.

1°/ Convergence de $\sum v_n(x)$ simplement sur $\mathbb{R}_+$

Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. Posons $a_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$

$b_n = (-1)^n$.

On peut appliquer le critère d'Abel. On a :

$\forall q \geq p : \left|\sum_{k=p}^{q} (-1)^k\right| \leq 1$. De plus $\lim_{n \to +\infty} a_n(x) = 0$

$a_n(x) \geq 0$ car $1 + \frac{x}{n(1+x)} \geq 1 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) \geq \ln 1 = 0$. 2pts

Reste la décroissance de $a_n(x)$. Il est clair que $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

donc $\frac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{x}{n(1+x)}$ car $x \geq 0$ et donc

le fait que $\ln$ est croissante, on aura $a_{n+1}(x) \leq a_n(x)$.

2°/ Convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$: On applique le critère d'Abel uniforme. En effet ; b_n ne dépend pas de x donc la condition sur les b_n est uniforme en x. Reste la convergence vers 0 uniformément de $a_n(x)$. On a : 3pts

$\forall x \geq 0$, $\frac{x}{1+x} \leq 1 \Rightarrow a_n(x) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow \sup_{x \in [0,+\infty[} a_n(x) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. (cqfd)

3°/ Convergence normale sur $\mathbb{R}_+$: On a $|v_n(x)| = a_n(x)$. Evaluons $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |v_n(x)|$. On a $a_n'(x) = \dfrac{\frac{1}{n(1+x)^2}}{1 + \frac{x}{n(1+x)}} = \dfrac{1}{n(1+x)^2 + x(1+x)} > 0$

Donc $a_n(\cdot)$ est croissante en $x \in \mathbb{R}_+$. Donc $\sup_{\mathbb{R}_+} a_n(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 3pts

càd : $\left(\sup_{\mathbb{R}_+} |v_n(x)|\right) \sim 1/n$ divergente. Donc

$\boxed{\text{Il n'y a pas de convergence normale}}$

Exercice 3 : (06 pts) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \geq 1$; série entière $\sum a_n x^n$

1°/ $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$; On peut reprendre la démonstration du cours concernant la série harmonique (ou de Bertrand)

En effet si $k \leq t \leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ 1pt

$\Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \boxed{\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}} \Rightarrow \boxed{\ln(n+1) \leq a_n}$

après sommation de 1 à n. Donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ car $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$

2°/ Rayon de convergence de la série entière ; On applique la formule de d'Alembert ; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + \frac{1}{n+1}}{a_n}$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)a_n} \longrightarrow 1$ car $\lim_{n\to+\infty} (n+1)a_n = +\infty$. 2pts.

D'où $\boxed{R = 1}$

3°/ Soit $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ la somme de la série entière sur $]-1,1[$ (car $R=1$). On peut écrire :

$$(1-x)F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$ 2pts

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^n$$

$$= a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n$$

or $a_1 = 1$ et $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}$ d'où $\boxed{(1-x)F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}$

4°/ Expression de $F(x)$: Posons $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ c'est une série entière de rayon de convergence 1, donc sur $]-1,1[$ on peut dériver terme à terme et on obtient $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow g(x) = -\ln(1-x)$ 1pt

car $g(0) = 0$. D'où

$$\boxed{F(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}}$$