Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
08/01/20
L2 MATH Topologie

Contrôle continue
Durée 01h30

Exercice 1:08pts Soient (E,τ) un espace topologique , A et B sont deux parties de E

1) Montrer que A est dense dans E si et seulement si $\forall\ U\in\tau \quad U\cap A\neq\varnothing$

2)Montrer que si A et B sont ouverts et denses dans E alors $A\cap B$ est un ouvert non vide et dense dans E

3)Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle on considère les parties :
$A=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $B=(\mathbb{Q}\cap\ [0,+\infty[) \cup (]-\infty,1]\cap\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\ )$
Déterminer $\bar{A},\bar{B}$ et $\overline{A\cap B}$, conclure!

4) Montrer que si A est un ouvert dense dans E alors le complémentaire de A est un fermé d'intérieur vide: $int(A^C)=\varnothing$.

5) Montrer que si F_1 et F_2 sont deux parties de E, fermées et d'intérieurs vides alors $F_1\cup F_2$ est un fermé et d'intérieur vide

6) Donner un exemple de deux parties d'intérieurs vides telles que leur réunion est d'intérieur non vide.

Exercice 2:07pts On munit l'ensemble $E=C([0,1],\mathbb{R})$ de la distance d_1 et on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par:

$$f_n(x)=\begin{cases}(n-2)\ x & \text{si}\quad 0\leq x\leq\frac{1}{n}\\ 1-\frac{2}{n} & \text{si}\quad \frac{1}{n}\prec x\leq\frac{2}{n}\\ 1-x & \text{si}\quad \frac{2}{n}\prec x\leq 1\end{cases}$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy

2) Déterminer pour tout $x\in[0,1]$ la limite $f(x)$ de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ .Vérifier que $d_1(f_n,f)\prec\frac{1}{2n}$

3) En déduire que E muni de la distance d_1n'est pas complet.

4) Calculer $d_\infty(f_n,f_m)$,la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle convergente dans (E,d_∞)?

(on rappelle que $d_\infty(f,g)=\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$ et $d_1(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx$)

Exercice 3 05pts Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, A une partie de E et f une application de (E,d) vers (F,δ)

1) Montrer que si f est continue alors pour toute suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset E$, $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=f(\lim_{n\to+\infty}x_n)$

2) En déduire que si f est continue alors $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$.où $\bar{A}$ est l'adhérence de A.

Corrigé

Exercice 1

(E,τ) est un espace topologique , A et B sont deux parties de E

1) Montrons que A est dense dans E si et seulement si $\forall\ U\in\tau \quad U\ \cap\ A\neq\varnothing$

" $\Rightarrow$ "

A est dense dans E $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\bar{A}=E\Longleftrightarrow\forall x\in E\ \ \forall\ V\in\boldsymbol{V}(x)\ \ V\cap\ A\neq\varnothing$ ($\boldsymbol{V}(x)$:ensemble des voisinage de x)

$\forall$ U étant un ouvert alors il est voisinage de chacun de ses points ie $U=\boldsymbol{V}(x)\ \ \forall x\in U$ alors $U\cap A\neq\varnothing$

" $\Leftarrow$ "$\forall x\in E\ \ \forall\ V\in\boldsymbol{V}(x),\ V\supset U\in\tau,U\ \cap\ A\neq\varnothing\Rightarrow V\cap\ A\neq\varnothing$ alors A est dense dans E

2)

Si A et B sont denses dans E alors $\forall\ U\in\tau \quad U\ \cap\ A\neq\varnothing$ et $U\ \cap\ B\neq\varnothing$,

$\forall\ U\in\tau \quad U\ \cap\ A\neq\varnothing$,en particulier pour $U=B$(ouvert) alors $A\cap B\neq\varnothing$

comme B est dense et $U\ \cap\ A$ est ouvert alors $(U\ \cap\ A)\cap B\neq\varnothing$ ie $U\ \cap\ (A\cap B)\neq\varnothing$

ainsi A$\cap\ B$ est dense dans E.

3) Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle on considère les parties :

$A=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $B=(\mathbb{Q}\cap\ [0,+\infty[)\cup(]-\infty,1]\cap\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\ )$

$\bar{A}=\bar{B}=\mathbb{R}$ et$A\cap B$$=]-\infty,1]\cap\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ $\overline{A\cap B}=]-\infty,1]\neq\mathbb{R}$,alors $A\cap B$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$car les conditions ne sont pas toutes satisfaites en effet:

ni A ni B n'est ouvert: $\forall x\in A,\ \forall\ U$ un intervalle ouvert contenant x , U ne peut pas être contenu dans A car il contient aussi les nombres rationnels.

4) A est un ouvet$\Rightarrow A^C$ est fermé et $A=int(A)$

A est dense dans $E\Longleftrightarrow\bar{A}=E$

Sachant que $int(A)\cup Fr\,(A)\cup int(A^C)=\bar{A}\cup int(A^C)=E$ et $\bar{A}\cap int(A^C)=\varnothing$,alors $int(A^C)=\varnothing$,

5) F_1 et F_2 sont deux parties de E, fermées et d'intérieurs vides alors F_1^C et F_2^C sont dences dans E d'aprés 4)

et$(F_1\cup\ F_2)^c=F_1^C\cap F_2^C$ intersection de deux ouverts dences dans E qui est aussi ouvert et dense dans E d'aprés 2)

ainsi $F_1\cup\ F_2$est un fermé et d'intérieur vide.

6) L'exemple de deux parties d'intérieurs vides telles que leur réunion est d'intérieur non vide.:

Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, on considère les parties :

$F_1=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $F_2=\mathbb{Q}$ $\quad F_1\cup\ F_2=\mathbb{R},\ int\,(F_1)=\varnothing\ \ int\,(F_2)=\varnothing$ et $int\,(F_1\cup\ F_2)=\mathbb{R}\neq\varnothing$

Cet exemple montre que la condition que les parties soient fermées est bien nécessaire dans 5)

ε

Exercice 2:07pts On munit l'ensemble $E=C\left([0,1]\,,\mathbb{R}\right)$ de la distance d_1 et on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$définie par:

$$f_n\,(x)=\begin{cases}(n-2)\ x & \text{si}\quad 0\leq x\leq\frac{1}{n}\\ 1-\frac{2}{n} & \text{si}\quad \frac{1}{n}\prec x\leq\frac{2}{n}\\ 1-x & \text{si}\quad \frac{2}{n}\prec x\leq 1\end{cases}$$

1) Montrons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est de Cauchy

on remarque que :$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\quad f_n\in E$ et si n $\geq m$ alors $f_n\geq f_m$

$$d_1\,(f_n,f_m)=\int_0^1|f_n\,(x)-f_m\,(x)|\,dx=\int_0^1 f_n\,(x)-f_m\,(x)\,dx=\int_0^1 f_n\,(x)\,dx-\int_0^1 f_m\,(x)\,dx=\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n^2}-\tfrac{1}{2n}\right)-\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{m^2}-\tfrac{1}{2m}\right)$$

$$d_1\,(f_n,f_m)=\tfrac{1}{2m}-\tfrac{1}{2n}+\tfrac{1}{m^2}-\tfrac{1}{n^2}\leq\tfrac{3}{2m}\leq\varepsilon\Rightarrow m\geq\tfrac{3}{2\varepsilon}$$

Ainsi $\forall\epsilon\succ 0\ \ \exists\eta_\varepsilon=\left[\frac{3}{2\varepsilon}+1\right]\in\mathbb{N}\qquad\forall n\succ m\geq\eta_\varepsilon\Rightarrow\ d_1\,(f_n,f_m)\leq\varepsilon$

donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy

2)$\forall$ x$\in$ $]0,1]$ $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1-x$ *et* $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$

. $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x=0 \\ 1-x & si \quad 0 \prec x \leq 1 \end{cases}$

$d_1(f_n, f) = \int_0^1 |f(x) - f_n(x)|\, dx = \int_0^1 f(x) - f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx - \int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} \prec \frac{3}{2n}$

3) $\lim_{n\to+\infty} d_1(f_n, f) = 0$ On déduit que $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ dans (E, d_1)

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0)$ alors f n'est pas continue sur $[0,1]$ ie $f \notin E$

On déduit alors que E muni de la distance d_1n'est pas complet.

4) $d_\infty(f_n, f_m) = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x), f_m(x)| \geq \max_{x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]} (n-m)\, x = 1 - \frac{m}{n} \succ \frac{1}{3}$ si $n \geq 2m$

,alors la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy donc divergente dans (E, d_∞).

Exercice3 (voir cours)