Question de cours : L'algorithme $y = e^{-x}$ est-il stable ?
(De petites perturbations x va engendrer de grandes (ou de petites) variations de y).

Exercice :
Partie1
(1) Obtenir le développement de Taylor de e^{-x} au voisinage de 0.
(2) Déduire de (1) le développement de Taylor de e^{-t^2} au voisinage de 0.
(3) Déduire de (2) le développement de Taylor de la fonction (utilisée en statistique)

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Spécifier la forme analytique du terme de reste.
(4) Quelle doit être la valeur minimale de n pour que l'erreur de l'approximation de $f(x)$ soit toujours inférieure à 10^{-4} pour $x \in [0, 1]$
(5) En utilisant les 4 premiers termes du développement de Taylor de f, évaluer l'expression $f(1)$ en arithmétique flottante à 4 chiffres avec arrondi en essayant de réduire au maximun les erreurs dues à l'arithmétique flottante.
(6) Donner le nombre de chiffres significatifs de l'approximation obtenue en (5) en la comparant avec la valeur exacte $f(1) = 0,842701$.

Partie2 On considère la fonction f de la partie1 dont les valeurs sont consignées dans la table suivante :

x	$f(x)$
$0,05$	$0,056$
$0,1$	$0,112$
$0,15$	$0,168$
$0,2$	$0,223$

(1) Déterminer un polynôme d'interpolation de degré 2 qui permet de calculer une approximation la plus précise possible de x=0,14. Calculer cette approximation.
(2) Donner l'expression analytique du terme d'erreur associée à l'approximation trouvée.

Partie3 En utilisant les 2 premiers termes du développement de Taylor de f, déterminer une valeur approchée de la solution d'équation

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \qquad \text{sur } [0, 1]$$

(indication : la pécision $\varepsilon = 10^{-3}$).

Question de cours :

2p L'algorithme $y = e^{-x}$ est stable pour de petites valeurs de x et instable pour de grandes valeurs de x car le conditionnement $Cond(e^{-x}, x) \approx |x|$ est très mauvais si $|x|$ est trés grand.

Exercice :

Partie1 (1) Développement de Taylor de e^{-x} au voisinage de $x_0 = 0$. On a

1p $$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^n\ x^n}{n!} + e^{-\xi(x)}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{où } \xi(x) \in [0, x]$$

(2) Déduire de (1) le développement de Taylor de e^{-t^2} au voisinage de 0. On a

1p $$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + ... + \frac{(-1)^{2n}\ t^{2n}}{n!} + e^{-\xi(t)}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}t^{2(n+1)} \quad \text{où } \xi(t) \in [0, t^2]$$

(3) Déduire de (2) le développement de Taylor de la fonction f. On a

2p $$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^x e^{-\xi(t)}t^{2(n+1)}dt\right)$$

(4) Pour $x \in [0, 1]$ l'erreur de l'approximation

1.5p $$|R_n(x)| = \frac{2}{\sqrt{\pi}(n+1)!}\int_0^x e^{-\xi(t)}t^{2(n+1)}dt \le \frac{2\displaystyle\int_0^1 t^{2(n+1)}dt}{\sqrt{\pi}(n+1)!} \le \frac{2}{\sqrt{\pi}(n+1)!(2n+3)}$$

La valeur minimale de n pour que $|R_n(x)| \le 10^{-4}$ est $n = 6$

(5) En utilisant les 4 premiers termes du développement de Taylor de f

1p $$f(1) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42}\right) \approx \frac{2}{0.1773 \times 10^1}\left[1.1 - (0.3333 \times 10^0 + 0.2381 \times 10^{-1}]\right).$$

Donc $f(1) \approx 0,8380$.

(6) Le nombre de chiffres significatifs 2 avec la valeur exacte $f(1) = 0,842701$.

Partie2 (1) Polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 2 qui passe par $(0.1, 0.1124629), (0.15, 0.1679960), (0.2, 0.2227026)$

1p $$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\ (x-x_2)}{(x_0-x_1)\ (x_0-x_2)} = \frac{(x-0.15)\ (x-0.2)}{(0.1-0.15)\ (0.1-0.2)} = \frac{x^2 - 0.35x + 0.03}{0.005}$$

1p $$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\ (x-x_1)}{(x_1-x_0)\ (x_1-x_2)} = \frac{(x-0.1)\ (x-0.2)}{(0.15-0.1)\ (0.15-0.2)} = \frac{x^2 - 0.3x + 0.02}{-0.0025}$$

1p $$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\ (x-x_1)}{(x_2-x_0)\ (x_2-x_1)} = \frac{(x-0.1)\ (x-0.15)}{(0.2-0.1)\ (0.2-0.15)} = \frac{x^2 - 0.25x + 0.015}{0.005}$$

Donc le polynôme d'interpolation de Lagrange est

1p

$$\begin{aligned} P_2(t) &= 0.112 \times L_0(t) + 0.168 \times L_1(t) + 0.223 \times L_2(t) \\ &= 22.4(x^2 - 0.35x + 0.03) - 67.2(x^2 - 0.3x + 0.02) + 44.6(x^2 - 0.25x + 0.015) \\ P_2(0.14) &= -0.2 + 1.17 - 0.003 = 0.15688 \end{aligned}$$

(2) L'expression analytique du terme d'erreur. $\forall x \in [0,1], \exists \xi \in [0,1]$ tel que

1p

$$E_2\big(f(x)\big) = f(x) - P_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \prod_{i=0}^{2} (x - x_i) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-0.1)(x-0.15)(x-0.2)$$

Partie3 En utilisant les 2 premiers termes du développement de Taylor de f,

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)$$

5p

L'équation $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ sur $[0,1]$ est équivalent à

$$x = \frac{3}{2(3 - x^2)} = g(x)$$

La dérivée de g est $g'(x) = \dfrac{3x}{(3-x^2)^2}$ et g est donc croissante .

condition(2) $\forall x \in [0,1] : |g'(x)| = \left|\dfrac{3x}{(3-x^2)^2}\right| < 1$

condition(1) $g([0,1]) = [g(0), g(1)] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \subset [0,1]$

Donc $g : [0,1] \to [0,1]$ est de C^1 tel que $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [0,1]$.

On applique l'algorithme en partant de n'importe qu'elle valeur initiale x_0 ($x_0 = 0.5$) on obtient

k	$x_{k+1} = \dfrac{3}{2(3-x_k^2)}$	$\lvert e_k\rvert = \lvert x_{k+1} - x_k\rvert$
0	$x_1 = 0.545454\cdots$	$0.045454\cdots$
1	$x_2 = 0.555046\cdots$	$0.009592\cdots$
2	$x_3 = 0.557222\cdots$	$0.002176\cdots$
3	$x_4 = 0.557724\cdots$	$0.000502\cdots$

Après 9 itérations la racine trouvée est $0.557724\cdots$ avec une précision $\varepsilon = 10^{-3}$