Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2019/2020.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Analyse 3* - Examen de Contrôle Continu.
Jeudi 09/01/2020 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (05pts) Soient a et b deux réels. On pose

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n-1} + b\sqrt{n+1} \quad , \quad n \geq 1.$$

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ si et seulement si $a+b+1=0$.
2. Déterminer ensuite les valeurs de a et b pour que la série numérique de terme général u_n soit convergente.

Exercice 2 : (07pts) On se propose d'étudier les convergences simple et normale de la série de fonctions de terme général $w_n(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{n}\right) - \cos\left(\frac{x}{n}\right)$, $n \geq 1$.

1. Soit $f(t) = \operatorname{ch}(t) - \cos(t)$. Donner l'expression du développement de Taylor de f au point 0 à l'ordre 2.
2. En déduire que la série de terme général $w_n(x)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.
3. A l'aide du même développement, montrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[-a, a]$, $a > 0$.

Exercice 3 : (08pts) Soit $a \in]0, \pi[$ un paramètre réel fixé. On considère la série entière réelle de terme général

$$v_n(x) = \frac{\cos(na)}{n!}\, x^n, \quad n \geq 0.$$

1. Déterminer le domaine de convergence de cette série.
2. Déterminer l'expression $F(x)$ de sa somme.
3. Résoudre ensuite dans $\mathbb{R}$ l'équation $F(x) = 0$.

2ème année de Licence Mathématiques – 2019/2020.

Module : « Analyse III » – Examen de Contrôle Continu.

Corrigé.

Exercice 1 : (05 pts) $a, b \in \mathbb{R}$; $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n-1} + b\sqrt{n+1}$, $n \geq 1$.

1/ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff a+b+1=0$: Une manière simple de le faire est la suivante ;

$$u_n = \sqrt{n} + a\left[\sqrt{n-1} - \sqrt{n} + \sqrt{n}\right] + b\left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \sqrt{n}\right]$$
$$= (1+a+b)\sqrt{n} + a\left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}\right) + b\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$
$$= (1+a+b)\sqrt{n} - \frac{a}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} + \frac{b}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$ 2pts

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (1+a+b)\sqrt{n}$ car les deux autres termes ont pour limite 0, $\forall a, b$.

Donc si $1+a+b=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$; et si $1+a+b \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ (cela dépend du signe de $1+a+b$) . cqfd.

2/ Convergence de la série $\sum u_n$: On procède par développement asymptotique des racines carrées.

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + t^2\varepsilon_1(t) , \quad t \in V(0)$$
$$\sqrt{1-t} = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + t^2\varepsilon_2(t) , \text{ D'où}$$

$$\sqrt{n-1} = \sqrt{n(1-\tfrac{1}{n})} = \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon_2(1/n)\right) = \sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}}\varepsilon_2(1/n)$$ 3pts
$$\sqrt{n+1} = \sqrt{n(1+\tfrac{1}{n})} = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon_1(1/n)\right) = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}}\varepsilon_1(1/n)$$

et donc $$u_n = \frac{b-a}{2\sqrt{n}} - \frac{b+a}{8n^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}}\varepsilon_3(1/n)$$

Si $b \neq a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, u_n = \frac{b-a}{2}\ (\neq 0)$ et la série diverge par le critère de Riemann.

Donc il faut que $b=a$, or $\underbrace{a+b+1=0}_{\text{cond. nécessaire de convergence}} \Longrightarrow \boxed{a=b=-1/2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2}u_n = 1/8$.

Exercice 2 : (07pts)

1°/ $f(t)=\operatorname{ch}t-\cos t$. On sait que $f(t)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}t+\frac{f''(0)}{2!}t^2+\frac{t^3}{3!}f'''(\theta t)$
$0<\theta<1$

Or $f'(t)=\operatorname{sh}t+\sin t$; $f''(t)=\operatorname{ch}t+\cos t$.

et $f'''(t)=\operatorname{sh}t-\sin t$ et donc

$$\boxed{f(t)=t^2+\frac{t^3}{6}\left[\operatorname{sh}(\theta t)-\sin(\theta t)\right]\ ;\ 0<\theta<1}$$

2pts

2°/ $W_n(x)=f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{x^2}{n^2}+\frac{x^3}{6n^3}\left[\operatorname{sh}\left(\frac{\theta x}{n}\right)-\sin\left(\frac{\theta x}{n}\right)\right]$

Fixons $x\in\mathbb{R}$. On a $\left|\frac{\theta x}{n}\right|\leq\frac{|x|}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2W_n(x)=x^2$, ceci prouve la convergence

de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1}W_n(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, par le critère

de Riemann.

2pts

3°/ Prenons maintenant $x\in[-a,a]$, c.à.d $|x|\leq a$. Alors

$\left|\frac{\theta x}{n}\right|\leq\frac{|x|}{n}\leq\frac{a}{n}\Rightarrow\left|\operatorname{sh}\left(\frac{\theta x}{n}\right)\right|\leq e^{\left|\frac{\theta x}{n}\right|}\leq e^{a/n}$.

et donc $|W_n(x)|\leq\frac{a^2}{n^2}+\frac{a^3}{6n^3}\left(e^{a/n}+1\right)$ $\left(\left|\sin\left(\frac{\theta x}{n}\right)\right|\leq1\right)$

$\Longrightarrow \sup\limits_{x\in[-a,a]}|W_n(x)|\leq\underbrace{\frac{a^2}{n^2}+\frac{a^3}{6n^3}(e+1)}_{\alpha_n}$ si $n\geq[a]+1$,

3pts

La série de terme gl α_n est convergente car $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\alpha_n=a^2$

(critère de Riemann). Donc la série $\sum\limits_{n\geq1}\sup\limits_{[-a,a]}|W_n(x)|$ est convergente.

Ceci est bien la convergence normale souhaitée.

Exercice 3 : (08pts) $a \in]0,\pi[$; $v_n(x) = \frac{\cos(na)}{n!} x^n$, $n \geq 0$.

1°/ Domaine de convergence : Il est facile de voir que

$$|v_n(x)| \leq \underbrace{\frac{|x|^n}{n!}}_{h_n(|x|)} \quad ; \quad h_n(t) = \frac{t^n}{n!}$$

La série de terme gl $h_n(t)$ est entière, avec $c_n = \frac{1}{n!}$. Donc

$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc le rayon de convergence de $\sum h_n(t)$ est $R = \infty$. Cela veut dire que $\forall t \geq 0$, $\sum h_n(x)$ converge. Or elle majore $|v_n(x)|$, donc $\sum v_n(x)$ est absolument convergente, $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc le domaine de convergence $\boxed{D = \mathbb{R}}$ 3pts

2°/ Expression de $F(x)$: $F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(na)}{n!} x^n$

On a $\cos(na) = \frac{1}{2}(e^{ina} + e^{-ina})$; d'où

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(e^{ia} x)^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(e^{-ia} x)^n}{n!} = \frac{1}{2}\left[e^{xe^{ia}} + e^{xe^{-ia}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x(\cos a + i \sin a)} + e^{x(\cos a - i \sin a)}\right] = \frac{e^{x\cos a}}{2}\left[e^{ix\sin a} + e^{-ix \sin a}\right]$$ 3pts

Alors $\boxed{F(x) = e^{x \cos a} \cos(x \sin a)}$

3°/ Résolution de $F(x) = 0$: $F(x) = 0 \iff \cos(x \sin a) = 0$

$\iff x \sin a = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Comme $a \in]0,\pi[$, alors $(\sin a) \neq 0$ d'où 2pts

les solutions sont les $\boxed{x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2 \sin a}, \ k \in \mathbb{Z}}$