Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen
Module: Mathématiques 2   Série de TD 04- Les Matrices.
1ère Année Sciences et technologies 2019-2020.

Exercice 01: On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$f\ (x, y, z) = (2x - 6z, y + 5z, x - 3z)$$

(1) Montrer que f est une application linéaire.

(2) trouver le noyau de f $(\ker f)$.

(3) Déduire $\dim(\ker f)$ et $\dim(\operatorname{Im} f)$.

Exercice 02: Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse:
1) $A^2 = I \Rightarrow A = \pm I$ 2) $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$ 3) $A^2 = A \Rightarrow A = I$ ou $A = 0$.
4) supp A diagonale $\Rightarrow A \times B = B \times A$ 5) supp $A \times B = B \times A \Rightarrow A \times^t B =^t B \times A$.
6) supp $A \times B = B \times A$ et A^{-1}existe$\Rightarrow A^{-1} \times B = B \times A^{-1}$

Exercice 03: Soit A une matrice carrée

1) Montrer que: si $A^4 = 0$ alors $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$. Dans ce cas $(I + A)$ est-elle inversible? Si oui donner son inverse.

2) Supp: Montrer que: si $A^{n+1} = 0$ alors $(I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^n$. Dans ce cas $(I + A)$ est-elle inversible? Si oui donner son inverse.

Exercice 04: **1)** Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ par la méthode de GAUSS et par la notion de la comatrice.

2) Déterminer le rang de la matrice suivante:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

Exercice 05: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & f\ (x, y) = (2x - y, 3x - 5y) \end{array}$$

(1) Trouver la matrice M associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^2$.

(2) Soit $B_1 = \{u_1, u_2\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $u_1 = (2, -1)$, $u_2 = (5, 3)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base B_1.

b) Trouver la matrice de passage Q de la base B_1 à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

c) Si V_1 est de composante $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

d) Déduire la matrice N associée à f relativement à la base B_1.

Exercice 05: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = (2x-y+z, 3x-y-z, 4x+y+z) \end{array}$$

(1) Trouver la matrice M associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2,-1,-2)$, $u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (3,1,2)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1.

b) Si V est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

c) Trouver la matrice N associée à f relativement à la base B_1.

Exercice 06: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = (x, y, x+y) \end{array}$$

Soient $B_2 = \{e_1, e_2\}$ et $B_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ les bases canoniques
de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

(1) Donner la matrice M associée à f relativement aux bases B_2 et B_3.

(2) Soient $C_2 = \{v_1, v_2\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,0)$ et $C_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$
avec $w_1 = (0,1,3)$, $w_2 = (-1,0,1)$ et $w_3 = (-2,-1,0)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base B_2 à la base C_2.

b) Déterminer la matrice de passage Q de la base B_3 à la base C_3.

c) Si V est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base B_3, déterminer alors les composantes de V dans la base C_3.

d) Trouver la matrice N associée à f relativement.$\{C_2, C_3\}$

Exercice 07: Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère l'application linéaire suivante:

$$\begin{array}{ccc} F & : & \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & F(P) = P(0)X^3 + P'(0)X^2 + \frac{1}{2}P''(0)X + \frac{1}{6}P'''(0) . \end{array}$$

1) Ecrire la matrice associée à u dans la base canonique B.

(2) Soient $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$ avec $v_1 = 2$, $v_2 = 1+x$, $v_3 = -2x + x^2$ et $v_4 = 2x^2 + x^3$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base B vers B'.

b) Déterminer la matrice de passage Q de la base B' vers B.

c) Ecrire: $V = 1 - x + 2x^2 + 5x^3$ dans B ensuite dans B'.

d) Trouver la matrice N associée à f relativement à B'.