Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Module: Mathématiques 2
1ère Année Sciences et technologies

Série de TD 03 " Les équations différentielles"

MESSIRDI.B ET SEHOULI F.

12/04/2020.

Exercice 01: Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$1)x(\ln x)\, y' = (3\ln x + 1)\, y,$$

c'est une équation différentielle d'ordre 1 à variable séparable, en effet:

$$\begin{aligned} x(\ln x)\, y' &= (3\ln x + 1)\, y \Rightarrow x(\ln x)\frac{dy}{dx} = (3\ln x + 1)\, y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{(3\ln x + 1)}{x(\ln x)}dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{(3\ln x + 1)}{x(\ln x)}dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = \int \frac{(3\ln x + 1)}{x(\ln x)}dx, \end{aligned}$$

mais pour:

$$I = \int \frac{(3\ln x + 1)}{x(\ln x)}dx, \text{ on pose: } \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(3t+1)}{t}dt = 3\int dt + \int \frac{dt}{t} = 3t + \ln|t| + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ &= 3\ln|x| + \ln|\ln x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc:

$$\begin{aligned} \ln|y| &= 3\ln|x| + \ln|\ln|x|| + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow |y| = e^{3\ln|x| + \ln|\ln|x|| + c_1}, c_1 \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow |y| = e^{\ln|x|^3} e^{\ln|\ln|x||} e^{c_1} \\ &\Rightarrow |y| = |x|^3 |\ln|x|| \, e^{c_1} \\ &\Rightarrow y = kx^3 \ln|x|, k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$2)y' \tan x = y\ln y,$$

c'est une équation différentielle d'ordre 1 à variable séparable, en effet:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}\tan x &= y\ln y \Rightarrow \frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx \Rightarrow \ln|\ln|y|| = \ln|\sin x| + c_1 \\ &\Rightarrow e^{\ln|\ln|y||} = e^{\ln|\sin x| + c_1} \Rightarrow |\ln|y|| = e^{c_1}|\sin x| \\ &\Rightarrow \ln|y| = c_2 \sin x, c_2 \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow |y| = e^{c_2 \sin x} \Rightarrow y = \pm e^{c_2 \sin x}, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$3)y' = 2x\left(e^{-y} + 1\right),$$

c'est une équation différentielle d'ordre 1 à variable séparable, en effet:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2x\left(e^{-y}+1\right) \Rightarrow \frac{dy}{e^{-y}+1} = 2xdx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{e^{-y}+1} = \int 2xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{\frac{1}{e^{y}}+1} = x^2 + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \int \frac{e^{y}dy}{e^{y}+1} = x^2 + c_1, \text{ on pose: } t = e^{y} \Rightarrow dt = e^{y}dy \\
&\Rightarrow \int \frac{dt}{t+1} = x^2 + c_1 \Rightarrow \ln|t+1| = x^2 + c_1 \\
&\Rightarrow \ln\left(e^{y}+1\right) = x^2 + c_1 \Rightarrow \left(e^{y}+1\right) = e^{x^2+c_1} \\
&\Rightarrow e^{y} = e^{x^2+c_1} - 1 \Rightarrow y = \ln\left|e^{x^2+c_1} - 1\right|, c_1 \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow y = \ln\left|ke^{x^2} - 1\right|, k \in \mathbb{R}^{+}.
\end{aligned}$$

$$4) x^2y' + xy = y^2 + x^2.$$

C'est une équation homogène de la forme:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

dans notre cas:

$$x^2y' + xy = y^2 + x^2 \Leftrightarrow y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} + 1 ... (\alpha)$$

on pose:

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t'x + t,$$

donc (α) donne:

$$\begin{aligned}
t'x + t &= t^2 - t + 1 \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 \\
&\Rightarrow \frac{dt}{(t-1)^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dt}{(t-1)^2} = \int \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow -\frac{1}{t-1} = \ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow t - 1 = \frac{-1}{\ln|x| + c_1} \Rightarrow t = 1 - \frac{1}{\ln|x| + c_1} \\
&\Rightarrow \frac{y}{x} = 1 - \frac{1}{\ln|x| + c_1} \Rightarrow y = x - \frac{x}{\ln|x| + c_1}, c_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$$5) xy' = y + x\left(\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2$$

C'est une équation homogène:

$$xy' = y + x\left(\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2 \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \left(\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2 ... (\alpha)$$

on pose:

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t'x + t,$$

donc (α) donne:

$$\begin{aligned}
t'x + t &= t + \cos^2 t \Rightarrow t'x = \cos^2 t \\
&\Rightarrow \frac{dt}{dx}x = \cos^2 t \Rightarrow \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \tan t = \ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow t = \arctan\left(\ln|x| + c_1\right) \Rightarrow y = x\arctan\left(\ln|x| + c_1\right), c_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$$6)xyy' = y^2 - x\sqrt{x^2-y^2}, x>0$$

C'est une équation homogène:

$$\begin{aligned}
xyy' &= y^2 - x\sqrt{x^2-y^2} \Rightarrow \frac{xyy'}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}\sqrt{x^2-y^2}\\
&\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2}}\\
&\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}, \ldots(\alpha)
\end{aligned}$$

on pose:

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t'x + t,$$

donc (α) donne:

$$\begin{aligned}
t\left(t'x+t\right) &= t^2 - \sqrt{1-t^2} \Rightarrow t\frac{dt}{dx}x = -\sqrt{1-t^2}\\
&\Rightarrow -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{dx}{x}\\
&\Rightarrow \int -\frac{2t}{2\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{dx}{x}\\
&\Rightarrow \sqrt{1-t^2} = \ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow 1-t^2 = \left(\ln|x|+c_1\right)^2\\
&\Rightarrow t^2 = 1-\left(\ln|x|+c_1\right)^2\\
&\Rightarrow t = \pm\sqrt{1-\left(\ln|x|+c_1\right)^2}\\
&\Rightarrow y = \pm x\sqrt{1-\left(\ln|x|+c_1\right)^2}, c_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercice 02: Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$\left(1+x^2\right)y' + xy = \sqrt{1+x^2}, \ldots(1)$$

c'est une équation linéaire avec second membre:

1ère étape: La solution de (1) sans second membre (ESSM)

$$\left(1+x^2\right)y' + xy = 0$$

C'est une équation à variable séparable:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} + xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-x}{(1+x^2)}dx\\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \frac{-1}{2}\int \frac{2x}{(1+x^2)}dx\\
&\Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow |y| = e^{-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c_1} \Rightarrow y = \pm e^{c_1}e^{\ln\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

donc la solution SSM est:

$$y_1 = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}, k \in \mathbb{R}.$$

2ème étape: La solution de (1) avec second membre (EASM)

$$\left(1+x^2\right)y' + xy = \sqrt{1+x^2}, \ldots(1)$$

on utilise la méthode de la variation de la constante on pose:

$$y_2 = \frac{k(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

(1) imlique que:

$$\left(1+x^2\right)\left[\frac{k'(x)\sqrt{1+x^2} - \frac{xk(x)}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)}\right] + x\frac{k(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad k'(x)\sqrt{1+x^2} - \frac{xk(x)}{\sqrt{1+x^2}} + x\frac{k(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} \\
&\Rightarrow \quad k'(x) = 1 \Rightarrow k(x) = x,
\end{aligned}$$

par suite:

$$y_2 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

alors la solution générale de (1) est:

$$Y = y_1 + y_2 = \frac{k+x}{\sqrt{1+x^2}}, k \in \mathbb{R}.$$

$$2) y' + \frac{1}{x\ln x} y = \frac{1}{\ln x} \text{ (sur }]0,1[\,)...(2),$$

c'est une équation linéaire avec second membre:

1ère étape: La solution de (2) sans second membre (ESSM)

$$y' + \frac{1}{x\ln x} y = 0$$

C'est une équation à variable séparable:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x\ln x} y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x\ln x}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x\ln x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|\ln|x|| + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad |y| = e^{\ln|\ln|x||^{-1} + c_1} \Rightarrow y = \pm e^{c_1}\frac{1}{|\ln|x||} \Rightarrow y_1 = \frac{k}{\ln x}, k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2ème étape: La solution de (2) avec second membre (EASM)

$$y' + \frac{1}{x\ln x} y = \frac{1}{\ln x}, ...(2)$$

on utilise la méthode de la variation de la constante on pose:

$$y_2 = \frac{k(x)}{\ln x}$$

(2) imlique que:

$$\begin{aligned}
\frac{k'(x)\ln x - \frac{1}{x}k(x)}{(\ln x)^2} + \frac{1}{x\ln x}\frac{k(x)}{\ln x} &= \frac{1}{\ln x} \\
\frac{k'(x)}{\ln x} - \frac{1}{x\ln x}\frac{k(x)}{\ln x} + \frac{1}{x\ln x}\frac{k(x)}{\ln x} &= \frac{1}{\ln x}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow k'(x) = 1 \Rightarrow k(x) = x,$$

par suite:

$$y_2 = \frac{x}{\ln x},$$

alors la solution générale de (1) est:

$$Y = y_1 + y_2 = \frac{k+x}{\ln x}, k \in \mathbb{R}.$$

$$3) y' = (\tan x)y + \sin x, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

c'est une équation linéaire avec second membre:

1ère étape: La solution de (3) sans second membre (ESSM)

$$y' - (\tan x)y = 0$$

C'est une équation à variable séparable:

$$\frac{dy}{dx} - (\tan x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = (\tan x)dx$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int (\tan x)dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx \\
&\Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln\cos x + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad |y| = e^{\ln(\cos x)^{-1} + c_1} \Rightarrow y = \pm e^{c_1}\frac{1}{\cos x} \Rightarrow y_1 = \frac{k}{\cos x}, k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2ème étape: La solution de (3) avec second membre (EASM)

$$y' - (\tan x)y = \sin x, \ldots (3)$$

on utilise la méthode de la variation de la constante on pose:

$$y_2 = \frac{k(x)}{\cos x}$$

(2) imlique que:

$$\frac{k'(x)\cos x + k(x)\sin x}{(\cos x)^2} - \frac{\sin x}{\cos x}\frac{k(x)}{\cos x} = \sin x$$

$$\Rightarrow k'(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow k(x) = \frac{-1}{4}\cos 2x,$$

par suite:

$$y_2 = \frac{-\cos 2x}{4\cos x},$$

alors la solution générale de (1) est:

$$Y = y_1 + y_2 = \frac{k}{\cos x} - \frac{\cos 2x}{4\cos x}, k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 03: Considérons l'équation différentielle suivante:

$$x^2y' + xy = ay^2 + bx^2 \ldots (E), a, b \in \mathbb{R}.$$

(1) Déterminer a et b pour que $(y_0(x) = x)$ soit une solution particulière de (E).

$$\begin{aligned}
x^2y_0' + xy_0 &= ay_0^2 + bx^2 \Rightarrow x^2 + x^2 = ax^2 + bx^2 \\
&\Rightarrow a + b = 2.
\end{aligned}$$

(2) Résoudre l'équation (E) dans les cas suivants:

i) $a = b = 0$:

$$(E) \Rightarrow x^2y' + xy = 0 \Rightarrow xy' + y = 0, x \neq 0$$

c'est une équation à variable séparable:

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dx} + y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \\ \ln|y| &= -\ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ |y| &= \frac{e^{c_1}}{|x|} \Rightarrow y = \pm\frac{e^{c_1}}{|x|} = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ii) $a = 0$et $b = 1$:

$$(E) \Rightarrow x^2y' + xy = x^2,$$

c'est une équation linéaire avec second membre:

1ère étape: La solution de (3) sans second membre (ESSM)

$$x^2y' + xy = 0 \Rightarrow xy' + y = 0, x \neq 0$$

c'est une équation à variable séparable:

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dx} + y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \\ \ln|y| &= -\ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ |y| &= \frac{e^{c_1}}{|x|} \Rightarrow y = \pm\frac{e^{c_1}}{|x|} = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2ème étape: La solution de (E) avec second membre (EASM)

$$x^2y' + xy = x^2, \ldots (E)$$

on utilise la méthode de la solution particulière:

$$y_2 = \frac{x}{2}$$

alors la solution générale de (E) est:

$$Y = y_1 + y_2 = \frac{k}{x} + \frac{x}{2}, k \in \mathbb{R}.$$

iii) $a = 1$ et $b = 0$:

$$(E) \Rightarrow x^2y' + xy = y^2.$$

C'est une équation de Bernoulli:

$$x^2y' + xy = y^2 \Rightarrow y^{-2}x^2y' + xy^{-1} = 1, \ldots (2)$$

alors on fait le changement: $z = y^{-1}$ d'où

$$z' = -\frac{y'}{y^2},$$

En remplaçant dans l'équation (2), on obtient

$$-x^2z' + xz = 1$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec seconde membre.

La résolution de l'équation sans seconde membre:

$$-x^2z' + xz = 0$$

donne

$$\begin{aligned} -x\frac{dz}{dx} + z &= 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \\ \ln|z| &= \ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = e^{c_1}|x| \end{aligned}$$

$$z_1\ (x) = k\ x \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Par suite, en utilisant la méthode de la solution particulière:

$$z_2\ (x) = \frac{1}{2x}.$$

Ainsi la solution générale de l'équation linéaire est donnée par

$$z\ (x) = kx + \frac{1}{2x} = \frac{2kx^2+1}{2x}, k \in \mathbb{R}.$$

et puisque $z = y^{-1}$ alors la solution générale de (2) est

$$y\ (x) = \frac{2x}{2kx^2+1} \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}.$$

iv) $a = 1$ et $b = 1$:

$$(E) \Rightarrow x^2y' + xy = y^2 + x^2.$$

C'est une équation de Riccatti: qui admet comme solution particulière $y_1 = x$.

On pose alors $y = y_1 + z = x + z$, z étant une nouvelle fonction inconnue, d'où

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow x^2(z'+1) + x(z+x) = (z+x)^2 + x^2 \\ &\Rightarrow x^2z' + x^2 + xz + x^2 = z^2 + 2xz + 2x^2 \\ &\Rightarrow x^2z' - xz = z^2, \end{aligned}$$

C'est une équation de Bernoulli:

$$z^{-2}x^2z' - xz^{-1} = 1, ...(5)$$

alors on fait le changement: $t = z^{-1}$ d'où

$$t' = -\frac{z'}{z^2},$$

En remplaçant dans l'équation (5), on obtient

$$-x^2t' - xt = 1 \Rightarrow x^2t' + xt = -1$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec seconde membre.

La résolution de l'équation sans seconde membre:

$$x^2t' + xt = 0$$

donne

$$\begin{aligned} x\frac{dt}{dx} + t &= 0 \Rightarrow \frac{dt}{t} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = -\int \frac{dx}{x} \\ \ln|t| &= -\ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow |t| = \frac{e^{c_1}}{|x|} \end{aligned}$$

$$t_1\ (x) = \frac{k}{x} \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Par suite, en utilisant la méthode de la solution particulière:

$$t_2\ (x) = \frac{-\ln|x|}{x}.$$

Ainsi la solution générale de l'équation linéaire est donnée par

$$t\ (x) = \frac{k}{x} - \frac{\ln|x|}{x} = \frac{k - \ln|x|}{x}, k \in \mathbb{R}.$$

et puisque $t = z^{-1}$ alors la solution générale de (2) est

$$z\ (x) = \frac{x}{k - \ln|x|} \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}.$$

donc la solution est:

$$y = y_1 + z = x + \frac{x}{k - \ln|x|}.$$

Exercice 04: Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$1) xy' + y - xy^3 = 0.$$

$$xy' + y - xy^3 = 0 \Rightarrow xy' + y = xy^3,$$

C'est une équation de Bernoulli:

$$y^{-3}xy' + y^{-2} = x, \ldots (1)$$

alors on fait le changement: $z = y^{-2}$ d'où:

$$z' = -2y^{-3}y',$$

En remplaçant dans l'équation (1), on obtient

$$-\frac{xz'}{2} + z = x \Rightarrow xz' - 2z = -2x,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec seconde membre.

La résolution de l'équation sans seconde membre:

$$xz' - 2z = 0$$

donne

$$\begin{aligned} x\frac{dz}{dx} - 2z &= 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2}{x}dx \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = 2\int \frac{dx}{x} \\ \ln|z| &= 2\ln|x| + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = e^{c_1}x^2 \end{aligned}$$

$$z_1\ (x) = \ k\ x^2 \text{ où } \ k \in \mathbb{R}.$$

Par suite, en utilisant la méthode de la solution particulière:

$$z_2\ (x) = 2x.$$

Ainsi la solution générale de l'équation linéaire est donnée par

$$z\ (x) = k\ x^2 + 2x, k \in \mathbb{R}.$$

et puisque $z = y^{-2}$ alors la solution générale de (1) est

$$y\ (x) = \pm\frac{1}{\sqrt{k\ x^2 + 2x}} \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}. (x \neq 0)$$

$$2)x^2\left(y'+y^2\right)=xy-1,...(2)$$

en vérifiant que $y_0(x)=\frac{1}{x}$ est une solution particulière.

$$x^2\left(y_0'+y_0^2\right)=x^2\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=0=x\left(\frac{1}{x}\right)-1=xy_0-1,$$

c'est à dire y_0 est une solution particulière de l'équation (2).

Mais l'équation (2) est de Riccatti, qui admet comme solution particulière $y_1=\frac{1}{x}$.

On pose alors $y=y_1+z=\frac{1}{x}+z$, z étant une nouvelle fonction inconnue, d'où

$$\begin{aligned}(2)\quad &\Leftrightarrow\quad x^2\left(-\frac{1}{x^2}+z'+\left(\frac{1}{x}+z\right)^2\right)=x\left(\frac{1}{x}+z\right)-1\\ &\Rightarrow\quad -1+x^2z'+1+x^2z^2+2xz=xz\\ &\Rightarrow\quad x^2z'+x^2z^2+xz=0\Rightarrow xz'+xz^2+z=0\\ &\Rightarrow\quad xz'+z=-xz^2\end{aligned}$$

C'est une équation de Bernoulli:

$$z^{-2}xz'+z^{-1}=-x,...(3)$$

alors on fait le changement: $t=z^{-1}$ d'où

$$t'=-\frac{z'}{z^2},$$

$$(3)\Rightarrow -xt'+t=-x,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec seconde membre.

La résolution de l'équation sans seconde membre:

$$-xt'+t=0$$

donne

$$\begin{aligned}-x\frac{dt}{dx}+t &= 0\Rightarrow\frac{dt}{t}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dt}{t}=\int\frac{dx}{x}\\ \ln|t| &= \ln|x|+c_1, c_1\in\mathbb{R}\Rightarrow|t|=e^{c_1}|x|\end{aligned}$$

$$t_1\ (x)=kx\quad \text{où}\quad k\in\mathbb{R}.$$

Par suite, en utilisant la méthode de la solution particulière:

$$t_2\ (x)=x\ln|x|.$$

Ainsi la solution générale de l'équation linéaire est donnée par

$$t\ (x)=kx+x\ln|x|, k\in\mathbb{R}.$$

et puisque $t=z^{-1}$ alors la solution générale de (2) est

$$z\ (x)=\frac{1}{kx+x\ln|x|}\quad \text{où}\quad k\in\mathbb{R}.$$

donc la solution est:

$$y=y_1+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{kx+x\ln|x|}.(x\neq 0)$$

Exercice 05: Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$y''-2y'+y=\cos x.(1)$$

1^{ére}- étape: La solution de l'équation sans seconde membre.

$$\begin{aligned} y'' - 2\ y' +\ y &= 0 \quad (2) \\ \text{l'équation caractéristique est donnée par} &: \ r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow \triangle = 0 \\ &\Rightarrow \ r_0 = 1 \\ \text{d'où la solution de (2) est définie par} &: \ y_1 + y_2 = c_1 e^x + c_2 x e^x, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2ème- étape: La solution de l'équation avec seconde membre. Par la méthode de la solution particulière:

$$\begin{aligned} y_3 &= k_1 \cos x + k_2 \sin x, \quad \text{est une solution de (1)} \\ &\Rightarrow y_3'' - 2\ y_3' +\ y_3 = \cos x \\ &\Rightarrow (-k_1 \cos x - k_2 \sin x) - 2\left(-k_1 \sin x + k_2 \cos x\right) + \left(k_1 \cos x + k_2 \sin x\right) = \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2k_2 = 1 \\ 2k_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ k_1 = 0 \text{ et } k_2 = -\frac{1}{2}, \right. \\ &\Rightarrow \ y_3 = -\frac{1}{2} \cos x. \end{aligned}$$

Conclusion: La solution générale est:

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{1}{2} \cos x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$2) y'' - 4y' + 3y = e^x$$

1^{ére}- étape: La solution de l'équation sans seconde membre.

$$\begin{aligned} y'' - 4\ y' + 3\ y &= 0 \quad (2) \\ \text{l'équation caractéristique est donnée par} &: \ r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow \triangle = 4 > 0, \\ &\Rightarrow \ r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 3. \\ \text{d'où la solution de (2) est définie par} &: \ y_1 + y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2ème- étape: La solution de l'équation avec seconde membre. Par la méthode de la variation de la constante:

$$\begin{aligned} y_3 &= c_1(x)\ e^x + c_2(x)\, e^{3x} \text{ est une solution de (1)} \\ &\Rightarrow y_3'' - 4\ y_3' + 3\ y_3 = e^x \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} c_1'(x)\ e^x + c_2'(x)\, e^{3x} = 0 \\ c_1'(x)\ e^x + c_2'(x)\ 3e^{3x} = e^x \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2c_2'(x)\, e^{3x} = e^x \\ c_2'(x) = e^{-\mathbf{2}x} \Rightarrow c_1'(x) = -1 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} c_1(x) = -x \\ c_2(x) = -\frac{1}{2} e^{-\mathbf{2}x} \end{array} \right. \\ &\Rightarrow y_3 = -x\ e^x - \frac{1}{2} e^x = \left(-x - \frac{1}{2}\right) e^x \end{aligned}$$

Conclusion: La solution générale est:

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 = c_1 e^x + c_2 e^{3x} - \left(x + \frac{1}{2}\right) e^x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$3) y'' + 3y' + 2y = x^2 + \sin x + e^{-x}.$$

1^{ére}- étape: La solution de l'équation sans seconde membre.

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2\ y &= 0 \quad (2) \\ \text{l'équation caractéristique est donnée par} &: \quad r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow \triangle = 1 > 0, \\ &\Rightarrow \quad r_1 = -1 \text{ et } r_2 = -2. \\ \text{d'où la solution de } (2) \text{ est définie par} &: \quad y_1 + y_2 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2ème- étape: La solution de l'équation avec seconde membre. Par la méthode de la solution particulière:

$$1^*) y'' + 3y' + 2y = x^2$$

$$\begin{aligned} y_3 &= ax^2 + bx + c, \quad \text{est une solution de } (1) \\ &\Rightarrow \quad {y_3}'' + 3\ {y_3}' + 2\ y_3 = x^2 \\ &\Rightarrow \quad (2a) + 3(2ax + b) + 2\left(ax^2 + bx + c\right) = x^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a = 1 \\ 2b + 6a = 0 \\ 2c + 3b + 2a = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2} \text{ et } c = \frac{7}{4} \right.$$

$$\Rightarrow \quad y_{3,1} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

$$2^*) y'' + 3y' + 2y = \sin x$$

$$\begin{aligned} y_3 &= k_1 \cos x + k_2 \sin x, \quad \text{est une solution de } (1) \\ &\Rightarrow \quad {y_3}'' + 3\ {y_3}' + \ 2y_3 = \sin x \\ &\Rightarrow \quad (-k_1 \cos x - k_2 \sin x) + 3(-k_1 \sin x + k_2 \cos x) + 2(k_1 \cos x + k_2 \sin x) = \sin x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} k_1 + 3k_2 = 0 \\ -3k_1 + k_2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ k_1 = -\frac{3}{10} \text{ et } k_2 = \frac{1}{10}, \right.$$

$$\Rightarrow \quad y_{3,2} = -\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x.$$

$$3^*) y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= (ax + b)\, e^{-x}, \quad \text{est une solution de } (1) \\ &\Rightarrow \quad {y_3}'' + 3\ {y_3}' + 2\ y_3 = e^{-x} \\ &\Rightarrow \quad \left(axe^{-x} + (b - 2a)\, e^{-x}\right) + 3\left(-axe^{-x} + (a - b)\, e^{-x}\right) + 2\left(axe^{-x} + be^{-x}\right) = e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \{ b - 2a + 3a - 3b + 2b = 1 \quad \Rightarrow \{ a = 1, b \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad y_{3,3} = (x + b)\, e^{-x}. \end{aligned}$$

Conclusion: La solution générale est:
$Y = y_1 + y_2 + y_3 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + xe^{-x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

$$4) y'' + \pi^2 y = \sin \pi x.$$

1^{ére}- étape: La solution de l'équation sans seconde membre.

$$\begin{aligned} y'' + \pi^2 y &= 0 \quad (2) \\ \text{l'équation caractéristique est donnée par} &: \quad r^2 + \pi^2 = 0 \Rightarrow \triangle < 0, \\ &\Rightarrow \quad r_1 = i\pi \text{ et } r_2 = -i\pi. \\ \text{d'où la solution de } (2) \text{ est définie par} &: \quad y_1 + y_2 = c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$2^{ème}$- étape: La solution de l'équation avec seconde membre. Par la méthode de la variation de la constante:

$$y_3 = c_1(x)\cos\pi x + c_2(x)\sin\pi x \text{est une solution de } (1)$$

mais:

$$y_3'' + \pi^2 y_3 = \sin\pi x$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} c_1'(x) \ \ \cos\pi x + c_2'(x)\sin\pi x = 0...(\alpha) \\ -c_1'(x) \ \ \pi\sin\pi x + c_2'(x) \ \ \pi\cos\pi x = \sin\pi x...(\beta) \end{cases}$$

$(\alpha)\times(\cos\pi x) - (\beta)\times(\sin\pi x) \Rightarrow c_1'(x) = \frac{1}{\pi}\sin^2\pi x = \frac{1}{2\pi}(1-\cos 2\pi x) \Rightarrow c_1(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4\pi^2}\sin 2\pi x.$

$(\alpha)\Rightarrow$

$$c_2'(x) = -\frac{1}{\pi}\frac{\sin^2\pi x\cos\pi x}{\sin\pi x} = -\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x \Rightarrow c_2(x) = \frac{1}{4\pi^2}\cos 2\pi x.$$

Conclusion: La solution générale est:
$Y = c_1\cos\pi x + c_2\sin\pi x + \left[\frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4\pi^2}\sin 2\pi x\right]\cos\pi x + \left[\frac{1}{4\pi^2}\cos 2\pi x\right]\sin\pi x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

$$5) y'' + \pi^2 y = \frac{1}{\sin\pi x}.$$

$1^{ére}$- étape: La solution de l'équation sans seconde membre.

$$\begin{aligned} y'' + \pi^2 y &= 0 \quad (2) \\ \text{l'équation caractéristique est donnée par} &: \ r^2 + \pi^2 = 0 \Rightarrow \triangle < 0, \\ &\Rightarrow r_1 = i\pi \text{ et } r_2 = -i\pi. \\ \text{d'où la solution de } (2) \text{ est définie par} &: \ y_1 + y_2 = c_1\cos\pi x + c_2\sin\pi x, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$2^{ème}$- étape: La solution de l'équation avec seconde membre. Par la méthode de la variation de la constante:

$$y_3 = c_1(x)\cos\pi x + c_2(x)\sin\pi x \text{est une solution de } (1)$$

mais:

$$y_3'' + \pi^2 y_3 = \frac{1}{\sin\pi x}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} c_1'(x) \ \ \cos\pi x + c_2'(x)\sin\pi x = 0...(\alpha) \\ -c_1'(x) \ \ \pi\sin\pi x + c_2'(x) \ \ \pi\cos\pi x = \frac{1}{\sin\pi x}...(\beta) \end{cases}$$

$(\alpha)\times(\cos\pi x) - (\beta)\times(\sin\pi x) \Rightarrow c_1'(x) = \frac{1}{\pi} \Rightarrow c_1(x) = \frac{x}{\pi}.$

$(\alpha)\Rightarrow$

$$c_2'(x) = -\frac{1}{\pi}\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x} \Rightarrow c_2(x) = -\frac{1}{\pi^2}\ln|\sin\pi x|.$$

Conclusion: La solution générale est:

$$Y = c_1\cos\pi x + c_2\sin\pi x + \frac{x}{\pi}\cos\pi x - \frac{1}{\pi^2}\ln|\sin\pi x|\sin\pi x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$