Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

1ère Année Sciences et Technologies

Module : Math 2- Tronc commun Sciences et Technologies

Série de TD n°02-Equations Différentielles

Exercice 01 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $x(\ln x)y' = (3\ln x + 1)y$ 2) $y' \operatorname{tg} x = y\ln y$ 3) $y' = 2x(e^{-y} + 1)$

4) $x^2y' + xy = y^2 + x^2$ 5) $xy' = y + x\left(\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2$ 6) $xyy' = y^2 - x\sqrt{x^2 - y^2}, x > 0$

Exercice 02 : Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes :

$$1)\ (1 + x^2)y' + xy = \sqrt{1 + x^2}$$
$$2)\ y' + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{\ln x}\ (\text{résoudre sur }]0,1[)$$
$$3)\ y' = (tg\ x)y + \sin x\ \ (\text{résoudre sur } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

Exercice 03 : Considérons l'équation différentielle

$$x^2y' + xy = ay^2 + bx^2 \qquad (\boldsymbol{E})\text{ , où } a \text{ et } b \text{ des réels}$$

1. Déterminer a et b pour que $(y_0(x) = x)$ soit une solution particulière de (E).
2. Résoudre l'équation $(\boldsymbol{E})$ dans les cas suivants :
   $i)\ a = b = 0,\qquad ii)\ a = 0 \text{ et } b = 1,\qquad iii)\ a = 1 \text{ et } b = 0\ \ iv)\ a = b = 1$

Exercice 04 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $xy' + y - xy^3 = 0$ (équation de Bernoulli)
2) $x^2(y' + y^2) = xy - 1$, en vérifiant que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution particulière.

Exercice 05 : Résoudre les équations différentielles du second ordre linéaires :

1) $y'' - 2y' + y = \cos x$ 2) $y'' - 4y' + 3y = e^x$ 3) $y'' + 3y' + 2y = x^2 + \sin x + e^{-x}$

4) $y'' + \pi^2 y = \sin(\pi x)$ 5) $y'' + \pi^2 y = \frac{1}{\sin(\pi x)}$

Corrigé Abrégé

Exercice 01 :

1) $y(x) = kx^3 \ln|x|\,, (x > 0 \; ou \; x < 0)$ 2) $y(x) = \exp(\mathrm{k} \sin x)$ 3) $y(x) = \ln\left|ke^{x^2} - 1\right|$

4) $y(x) = x - \dfrac{x}{\ln|x| + k}$ 5) $y(x) = x\, Arctg(\ln|x| + k)$ 6) $y(x) = \pm x^2\sqrt{1 - (\ln|x| + k)^2}$

k constante réelle. Pour les 3 dernières on a $x \in \,]-\infty, 0[\; ou \; x \in \,]0, +\infty[$

Exercice 02 :

$$1)\; y(x) = \frac{k + x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad 2) y(x) = \frac{k + x}{\ln x} \quad 3)\; y(x) = \frac{k}{\cos x} - \frac{\cos(2x)}{4\cos x}$$

Exercice 03 :

1) La fonction y_0 est une solution implique $a + b = 2$.
2) $Si\; x = 0, on\; a\; la\; solution\; triviale\; y = 0\; si\; a \neq 0\; et\; une\; infinité\; de\; solution\; si\; a = 0$

   Dans ce qui suit on suppose $x \neq 0$:

$$i)\; Equation\; à\; var. sép. et\; y(x) = \frac{k}{x} \qquad ii)\; Equation\; linéaire\; et\; y(x) = \frac{k}{x} + \frac{x}{2}$$

$$iii)\; Equation\; de\; Bernoulli\; et\; y(x) = \frac{2x}{1 + 2kx^2} \quad iv) Equation\; de\; Riccati\; et\; y(x) = \frac{x}{k - \ln|x|} + x$$

Exercice 04 :

$$1)\; y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2x + kx^2}}, si\; x \neq 0\; et\; y = 0\; si\; x = 0 \quad 2)\; y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{kx + xln\,|x|}, \qquad (x > 0\; ou\; x < 0)$$

Exercice 05 :

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^x - \frac{1}{2}\sin x \qquad 2)\; y(x) = \left(c_1 - \frac{1}{2}x\right)e^x + c_2 e^{3x}$$

$$3)\; y(x) = \frac{1}{4}(2x^2 - 6x + 7) + xe^{-x} + \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$4) y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x) - \frac{1}{2\pi} xcos\,(\pi x)$$

$$5)\; y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x) - \frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\ln|\sin(\pi x)|$$