Université Aboubekr Belkaid-Tlemcen

Module: Mathématiques 2
1ère Année Sciences et technologies

Série de TD 02 " Le développement limité"

MESSIRDI.B ET SEHOULI F.

19/03/2020.

Exercice 01: En utilisant la formule de Taylor, développer les fonctions suivantes à l'ordre 3:

Sachant que f est de classe $C^3([x_0, x])$ et admet une dérivée d'ordre 4 sur $]x_0, x[$, alors:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-x_0)^4, c \in]x_0, x[.$$

C'est la formule de taylor à l'ordre 3 au voisinage de x_0.

$$1) f_1(x) = \frac{1}{1-x} \text{ au voisinage de } x_0 = -1.$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, f_1''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, f_1^{(3)}(x) = \frac{2.3}{(1-x)^4} \text{ et } f_1^{(4)}(x) = \frac{2.3.4}{(1-x)^5}.$$

Donc:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{16}(x+1)^3 + \frac{1}{(1-c)^5}(x+1)^4, c \in]-1, x[.$$

$$2) f_2(x) = e^{\sqrt{x}} \text{ au voisinage de } x_0 = 1.$$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}e^{\sqrt{x}}, f_2''(x) = \left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}x^{-1}\right)e^{\sqrt{x}}, \\ f_2^{(3)}(x) &= \left(\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}x^{-2}\right)e^{\sqrt{x}} \text{ et } f_2^{(4)}(x) = \left(-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} + \frac{1}{16}x^{-2} + \frac{15}{16}x^{-3} - \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\right)e^{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Donc:

$$f_2(x) = e + \frac{1}{2}(x-1) + e(x-1)^3 + \left(-\frac{15}{16}c^{-\frac{7}{2}} + \frac{1}{16}c^{-2} + \frac{15}{16}c^{-3} - \frac{3}{8}c^{-\frac{5}{2}}\right)e^{\sqrt{c}}(x-1)^4, c \in]1, x[.$$

$$3) f_3(x) = \ln(\sin x) \text{ au voisinage de } x_0 = \frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} = \tan x, f_3''(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \\ f_3^{(3)}(x) &= \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \text{ et } f_4^{(4)}(x) = \frac{2+\sin^2 x}{\cos^4 x}. \end{aligned}$$

Donc:

$$f_2(x) = e + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{2+\sin^2 c}{\cos^4 c}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4, c \in \left]\frac{\pi}{3}, x\right[.$$

Exercice 02: Calculer le $DL_3(0)$ des fonctions suivantes:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o\left(x^3\right), o\left(x^3\right) \to 0 \text{ si } x \to 0.$$

Remarque: Ici on utilise les DL connus.

$$1)f_1(x) = e^x \ln(1+x)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o\left(x^3\right) \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2}\right) + o\left(x^3\right) \text{ prendre que les puissances} \leq 3 \text{ dans la distribution,} \\ &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

$$2)f_2(x) = \frac{x+1}{x^2+x+2} = \frac{1+x}{2+x+x^2}$$

$1+x$	$2+x+x^2$
$-1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2$	
$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$	
$-\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$	
$\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^4$	
$\frac{1}{8}x^3$	

D'où:

$$f_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o\left(x^3\right).$$

$$3)f_3(x) = \ln\left(1 + \sqrt{1+x}\right),$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o\left(x^3\right)$$

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \ln\left(1 + 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\right) + o\left(x^3\right) \\ &= \ln\left(2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\right) + o\left(x^3\right) \\ &= \ln\left[2\left(1 + \frac{x}{4} - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3\right)\right] + o\left(x^3\right) \\ &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{4} - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3\right) + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

mais

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o\left(X^3\right)$$

Dans notre cas il suffit de poser: $X = \frac{x}{4} - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3$ et prendre que les puissances ≤ 3, ce qui donne:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \ln 2 + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3\right) - \frac{\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3\right)^3}{3} + o\left(x^3\right) \\ &= \ln 2 + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{32}\right) + \frac{1}{3}.\frac{x^3}{64} + o\left(x^3\right) \\ &= \ln 2 + \frac{x}{4} - \frac{3}{32}x^2 + \frac{10}{192}x^3 + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

$$4) f_4(x) = e^{\sin x}$$

$$f_4(x) = e^{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}$$

mais:

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + o\left(X^3\right)$$

Dans notre cas il suffit de poser: $X = x - \frac{x^3}{6}$ et prendre que les puissances ≤ 3, ce qui donne:

$$\begin{aligned} f_4(x) &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{6} + o\left(x^3\right) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) f_5(x) &= \frac{1}{1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \\ &= \frac{1}{1 + 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3} + o\left(x^3\right) \\ &= \frac{1}{3 - \frac{1}{4}x^2} + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & 3 - \frac{1}{4}x^2 \\ -1 + \frac{1}{12}x^2 & \frac{1}{3} + \frac{1}{36}x^2 \\ -\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{144}x^4 & \\ \text{dépasse l'ordre} & \end{array}$$

donc:

$$f_5(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{36}x^2 + o\left(x^3\right).$$

Remarque: On remarque qu'on a trouvé que les puissances paires ce qui affirme les calculs car la fonction f_5 est paire.

$$\begin{aligned} 6) f_6(x) &= (1+x)^{\frac{1}{1+x}} \\ &= e^{\frac{1}{1+x}\ln(1+x)} = e^{\frac{1}{1+x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3)} \\ &= e^{x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3} \end{aligned}$$

car:

$$\begin{array}{ll} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} & 1 + x \\ -x - x^2 & x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 \\ -\frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} & \\ \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 & \\ \frac{11}{6}x^3 & \end{array}$$

mais:

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + o\left(X^3\right)$$

Dans notre cas il suffit de poser: $X = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3$ et prendre que les puissances ≤ 3, ce qui donne:

$$\begin{aligned} f_6(x) &= 1 + \left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3\right) + \frac{\left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3\right)^3}{6} + o\left(x^3\right) \\ &= 1 + \left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - 3x^3\right) + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right) \\ &= 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Exercice 03: Calculer le $DL_n\left(x_0\right)$ des fonctions suivantes:

$$f_1\left(x\right)=\sin x, DL_4\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

On pose: $X=x-\frac{\pi}{4}, x=X+\frac{\pi}{4}$, si $x\to\frac{\pi}{4}$ alors $X\to 0$.

$$\begin{aligned}
f_1\left(X\right) &= \sin\left(X+\frac{\pi}{4}\right)=\cos X\sin\frac{\pi}{4}+\sin X\cos\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos X+\sin X\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{X^2}{2}+\frac{X^4}{4!}+X-\frac{X^3}{3!}\right)+o\left(X^4\right) \\
f_1\left(x\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right]+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right).
\end{aligned}$$

$$f_2\left(x\right)=\frac{\ln x}{x^2}, DL_4\left(1\right).$$

On pose: $X=x-1, x=X+1$, si $x\to 1$ alors $X\to 0$.

$$f_2\left(X\right)=\frac{\ln\left(X+1\right)}{\left(X+1\right)^2}=\frac{X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{4}+o\left(X^4\right)}{1+2X+X^2}$$

$$\begin{array}{ll}
X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{4} & 1+2X+X^2 \\
-X-2X^2-X^3 & X-\frac{5}{2}X^2+\frac{13}{3}X^3-\frac{77}{12}X^4 \\
-\frac{5}{2}X^2-\frac{2}{3}X^3-\frac{X^4}{4} & \\
\frac{5}{2}X^2+5X^3+\frac{5}{2}X^4 & \\
\frac{13}{3}X^3+\frac{9}{4}X^4 & \\
-\frac{13}{3}X^3-\frac{26}{3}X^4 & \\
-\frac{77}{12}X^4 &
\end{array}$$

Ce qui implique que:

$$f_2\left(X\right)=X-\frac{5}{2}X^2+\frac{13}{3}X^3-\frac{77}{12}X^4++o\left(X^4\right),$$

d'où:

$$f_2\left(x\right)=\left(x-1\right)-\frac{5}{2}\left(x-1\right)^2+\frac{13}{3}\left(x-1\right)^3-\frac{77}{12}\left(x-1\right)^4++o\left(\left(x-1\right)^4\right).$$

$$f_3\left(x\right)=\cos\ln x, DL_3\left(1\right).$$

On pose: $X=x-1, x=X+1$, si $x\to 1$ alors $X\to 0$.

$$\begin{aligned}
f_3\left(X\right) &= \cos\ln\left(X+1\right) \\
&= \cos\left(X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+o\left(X^3\right)\right)
\end{aligned}$$

mais:

$$\cos y=y-\frac{y^2}{2}+o\left(y^3\right)$$

Il suffit de poser: $y=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}$ et prendre que les puissances ≤ 3.

$$\begin{aligned}
\cos\left(X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+o\left(X^3\right)\right) &= \left(X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}\right)-\frac{\left(X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}\right)^2}{2}+o\left(X^3\right) \\
&= \left(X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(X^2-X^3\right)+o\left(X^3\right) \\
&= X-X^2+\frac{5X^3}{6}+o\left(X^3\right) \\
f_3\left(x\right) &= \left(x-1\right)-\left(x-1\right)^2+\frac{5\left(x-1\right)^3}{6}+o\left(\left(x-1\right)^3\right).
\end{aligned}$$

Exercice 04: A l'aide des DL, calculer les limites suivantes:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)}{x\left(x-\frac{x^3}{3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{x^2\left(1-\frac{x}{3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2\left(1-\frac{x}{3}\right)}=0.$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2-x^2}{x^2\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+\frac{x^6}{36}-\frac{x^4}{3}\right)-x^2}{x^2\left(x^2+\frac{x^6}{36}-\frac{x^4}{3}\right)}\lim_{x\to 0}\frac{x^4\left(\frac{x^2}{36}-\frac{1}{3}\right)}{x^4\left(1+\frac{x^4}{36}-\frac{x^2}{3}\right)}=-\frac{1}{3}.$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}(\sin x)^{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}e^{\tan^2 x\ln\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{x^2\ln\left(x-\frac{x^3}{6}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}e^{x^2\left[\ln x\left(1-\frac{x^2}{6}\right)\right]}=\lim_{x\to 0}e^{x^2\left[\ln x+\ln\left(1-\frac{x^2}{6}\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{x^2\ln x-\frac{x^4}{6}}=e^0=1.$$

car: $\lim_{x\to 0}x\ln x=0.$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+o\left(x^4\right)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{24}}{x^4}=\frac{1}{24}.$$

$$5)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

$$=\lim_{y\to 0}e^{\frac{1}{y}\ln\left(\frac{\frac{1}{y}-1}{\frac{1}{y}+1}\right)}\text{ on pose }y=\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{y\to 0}e^{\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)}=\lim_{y\to 0}e^{\frac{\ln(1-y)-\ln(1+y)}{y}}$$

$$=\lim_{y\to 0}e^{\frac{\left(-y-\frac{y^2}{2}\right)-\left(y-\frac{y^2}{2}\right)}{y}}=e^{-2}.$$

$$6)\ \lim_{x\to+\infty}x^3\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)+\frac{x^2}{2}\sin\frac{1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^3}\ln(\cos y)+\frac{1}{2y^2}\sin y,\text{ on pose }y=\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^3}\ln\left(1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}\right)+\frac{1}{2y^2}\left(y-\frac{y^3}{6}\right)$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^3}\left(-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}-\frac{y^4}{4}\right)+\frac{1}{2y^2}\left(y-\frac{y^3}{6}\right)$$

$$=\lim_{y\to 0}-\frac{7}{24}y=0.$$

$$7)\ \lim_{x\to 1}\frac{a^{\ln x}-x}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{\ln x\ln a}-x}{\ln x}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\ln a\ln(y+1)}-(y+1)}{\ln(y+1)}\text{ on pose : }y=x-1$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y\ln a}-(y+1)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y\ln a)-(y+1)}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(\ln a-1)\,y}{y}=(\ln a-1).$$

$$8)\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to1}e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = \lim_{y\to0}e^{\frac{-1}{y}\ln(y+1)}, \text{on pose : } y = x-1$$
$$= \lim_{y\to0}e^{\frac{-1}{y}(y+o(y))} = e^{-1}.$$

$$9)\lim_{x\to+\infty}\ln x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln x\ln\left(\frac{\ln x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\ln x\ln\left(\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\ln x\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\ln x\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Le passage entre la 3ème ligne et la 4ème, on a utilisé

$$y = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} \to 0 \text{ si } x\to+\infty \text{ et } \ln(1+y)\sim y, V(0).$$

Exercice 05: Soit la fonction: $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$. Déterminer, s'il existes, les asymptôtes à la courbe représentative de f. Etudier la position de la courbe par rapport à ses asymptôtes.

Remarque: Il suffit de calculer le $DL_2(+\infty)$ de la fonction: $\frac{f(x)}{x}$.

On Clacul le $DL_2(+\infty)$ de la fonction: $\frac{f(x)}{x}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)x\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{x}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{x} = \sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

On pose: $y = \frac{1}{x}$, si $x\to+\infty$, alors: $y\to0$.

$$\sqrt[3]{(1-2y^2)(1+3y)} = \sqrt[3]{(1-2y^2)}\sqrt[3]{(1+3y)}$$
$$= (1-2y^2)^{\frac{1}{3}}(1+3y)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(1+\frac{1}{3}(-2y^2)+o(y^2)\right)\left(1+\frac{1}{3}(3y)+\frac{\frac{1}{3}.\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}(3y)^2+o(y^2)\right)$$
$$= 1+y-y^2-\frac{2}{3}y^2+o(y^2)$$
$$= 1+\frac{1}{3}y-\frac{5}{3}y^2+o(y^2).$$

Donc:

$$\frac{f(x)}{x} = 1+\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$$

ce qui donne que:

$$f(x) = x+1-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{x}\right)+o\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Alors, la courbe admet une asymptôte oblique d'équation: $(\triangle): y = 1+x$.

Pour la position:

$$\begin{cases} (C_f) \text{ est au-dessous de } (\triangle) \text{ Si } x>0, \\ (C_f) \text{ est au-dessus de } (\triangle) \text{ Si } x<0. \end{cases}$$